Capítulo 2

Números

Fazendo contas sem calculadora

Geraldo Ávila

Introdução

A calculadora de bolso é, hoje em dia, um instrumento de fácil acesso a qualquer pessoa. Já vai longe o tempo em que se discutia se os alunos podem ou não usá-la, pois eles a têm em mãos com a maior facilidade. O importante é saber quando seu uso é recomendado porque ajuda, e quando a calculadora em nada contribui e deve ser evitada. A **RPM** já tratou do uso da calculadora em artigos que contêm informações importantes e pouco divulgadas sobre o quanto pode fazer a "calculadora do feirante".

Como dizem muito bem os autores de um dos artigos, a calculadora deve ser introduzida "quando o aluno estiver dominando completamente os algoritmos das operações...". Isso nos traz à mente certas habilidades de cálculo que não usam a calculadora, mas que, por serem muito importantes, devem ser cultivadas desde os estágios mais elementares do aprendizado. É sobre isso que desejamos falar aqui.

Vamos fazer as contas de cabeça

Isso mesmo, vamos começar com problemas que podemos resolver "na hora", quando estamos no meio de uma conversa e não dispomos de lápis e papel, muito menos de calculadora. É o que se costuma dizer: fazer as contas "de cabeça".

Vamos começar com contas de subtrair, usando a técnica da “translação”. Por exemplo, subtrair 34 de 61 é o mesmo que subtrair 30 de 57 (veja, estamos transladando os dois números para a esquerda de 4 unidades) ou, ainda, o mesmo que subtrair 40 de 67 (agora somamos 6 unidades a ambos os números). Em ambos os casos, é fácil ver que a diferença é 27.

Problema 1

Meu avó nasceu em 1872 *e faleceu em* 1965. *Quantos anos viveu ?*

Por que pegar lápis e papel para fazer a conta? Use a técnica da translação, assim: a diferença entre 1965 e 1872 é a mesma que entre 1963 e 1870. Ora, de 1870 a 1900 são 30 anos; a estes somo os 63 que vão de 1900 a 1963. Meu avô viveu 93 anos.

Posso também raciocinar assim:

$$1965 - 1872 = 165 - 72 = 163 - 70 = 63 + 30 = 93.$$

Outro modo: de 1965 a 1972 (quando meu avô completaria 100 anos de idade) são 7 anos. Então ele viveu 100 – 7 = 93 anos.

Podíamos também ter transladado para a frente, assim (mas tudo de cabeça):

$$(1965 + 8) - (1872 + 8) = 1973 - 1880 = 20 + 73 = 93.$$

Outro modo: de 1872 a 1962 são 90 anos (pois só faltam mais 10 para chegar a 100 anos em 1972); aos 90 acrescento 3 para chegar a 1965, obtendo os 93 anos.

Problema 2

Em 1942 *meu* avô *completou* 70 anos. *Em que* ano ele *nasceu?*

Somo 30 a 1942 e obtenho 1972, quando meu avô completaria 100 anos; logo, ele nasceu em 1872, ou seja, 100 anos antes.

Outro modo: se o ano fosse 1940, eu voltaria 40 anos ao ano de 1900, do qual volto mais 30 e chego a 1870; agora somo os 2 anos que tirei no início e chego ao ano do nascimento de meu avô: 1872.

Alguns desses problemas de calcular a idade de uma pessoa são muito fáceis de resolver, quando os anos de nascimento e morte têm formas bem particulares. Veja, por exemplo, o caso de *Nicolau Copérnico,* que nasceu em 1473 e faleceu em 1543. Aqui é fácil ver que faltam 30 anos para se chegar a 1573, quando Copérnico completaria 100 anos; logo, ele viveu 70 anos, 100 – 30.

Problema 3

Outro dia encontrei-me com um senhor que foi muito amigo de meu pai. Eu lhe perguntei a idade e ele me disse: estou com 83 *anos. Em que ano ele nasceu?*

Vejamos: como estamos em 2005, tenho de subtrair 83 de 2005. Pela técnica de translação, basta subtrair 80 de 2002, o que é fácil fazer de cabeça. O resultado é 1922, ano do nascimento desse amigo de meu pai.

Outro modo: somo 7 a 2005 e vou para 2012, quando ele terá 90 anos; mais 10 e chego a 2022, quando ele terá 100 anos; volto 100 anos a 1922, que é quando ele nasceu.

Problema 4

Lúcia tinha 10 *anos em* 1917. *Qual era sua idade em* 1998*?*

Se em 1917 Lúcia tinha 10 anos, em 1910 ela estava com 3 anos. De 1910 a 1995 são mais 85 anos; portanto, em 1995 ela estava com 85 anos de idade, logo 88 anos em 1998.

De tanto resolver problemas corno esses, o aluno vai, por si mesmo, inventando maneiras próprias de fazer as contas.

Contas de somar

Quando usamos a técnica da translação nas contas de subtrair, temos de aumentar ou diminuir os dois números, simultaneamente, da mesma quantidade. No caso da soma aumentamos um e diminuímos o outro da mesma quantidade. Por exemplo, somar 47 com 39 é o mesmo que somar 46 com 40, ou 50 com 36, resultando em 86. Somar 143 com 234 é o mesmo que somar 140 com 237, que é o mesmo que 40 + 337, que é 377; mas tudo isso de cabeça, nada de lápis e papel.

A resolução mental desses probleminhas é um bom exercício para desenvolver bem a compreensão das operações de soma e subtração. E é coisa que pode ser exercitada durante a aula, num clima agradável e de brincadeira com as crianças, introduzindo questões como estas: “Vai ver que, embora a Luciana seja mais velha que o Francisco, o avô deste pode ter nascido antes do que o avô da

Luciana. Vai ver que o Gabriel nem sabe a idade da avó ou do pai dele! Então terá mais um dever de casa: trazer amanhã as idades de seu pai e de sua avó."

Mas não vá lhes perguntar em que ano nasceram, isso fica para ser resolvido durante a aula...

A importância da tabuada

A calculadora não dispensa uma boa compreensão das operações, nem o aprendizado da tabuada. O aluno precisa aprender a tabuada hoje, tanto quanto no meu tempo de menino, quando não existia calculadora. Qualquer um deve saber responder – e responder rapidamente – a perguntas que me faziam na escola primária (o que hoje são as primeiras 4 séries do ensino fundamental): 7 vezes 8?, 9 vezes 6?, 5 vezes 8?, e assim por diante. É preciso ter cuidado para que o uso da calculadora não deixe de lado o aprendizado da tabuada e uma boa compreensão das operações.

Digo isso porque o aprendizado da tabuada tem sido muito negligenciado ultimamente, depois que surgiu a calculadora. Houve mesmo casos de muitos professores que pensavam (ou ainda pensam?) que agora, com a calculadora, a tabuada perde sua importância. Não é assim. Não é apenas porque alguns de nós somos mais velhos que insistimos no aprendizado da tabuada, mas é porque esse aprendizado continua tão importante hoje como antigamente. Se não, vejamos: você vai à padaria, compra 7 pãezinhos, a R$ 0,12 cada um, e paga com uma moeda de R$1,00; quanto vai receber de troco? Esse é o tipo de situação que qualquer pessoa deve resolver de cabeça; são cálculos triviais. Se alguém me disser que ninguém tem de saber 7 vezes 12 de cabeça, eu respondo: então deve saber que 5 vezes 12 é 60; agora some mais 12, vai para 72; e some outros 12, vai para 84. Pronto, 7 pãezinhos custam 84 centavos; um real menos 84 centavos (que é o mesmo que 96 centavos menos 80 centavos) dá 16 centavos, que é o troco devido. Essa última conta do troco poderia também ser feita assim: de 84 até 90 são 6, ao qual somamos 10 para chegar até 100, ao todo 16 centavos.

Cálculos como esses são necessários na vida de qualquer cidadão, por isso é importante saber a tabuada e saber fazer contas simples como essas, sem recorrer a lápis, papel ou calculadora. E, como já dissemos acima, é um bom exercício para desenvolver bem a compreensão das operações. Eu pergunto: não seria o caso de passar boa parte das aulas fazendo tais exercícios? E depois organizar os alunos em grupos e fazer competições entre os grupos? Seria um modo de tornar a aula descontraída, engraçada e agradável, ao mesmo tempo que se estimularia o interesse dos alunos nesses exercícios de compreensão das operações e de memorização.

Decorar é preciso

As pessoas que consideram desnecessário decorar a tabuada talvez pensem que “decorar”, de um modo geral, seja uma atividade menos nobre e sem valor algum. Isso não é verdade. “Decorar” é um importante exercício para a memória. E uma boa memória – privilégio de poucos – é um valioso auxiliar da atividade intelectual. O grande matemático *Leonardo Euler* (1707-1783) tinha excelente memória, a ponto de saber, de cor, dentre outras coisas, toda a Eneida de Virgílio. Em latim! Qualquer cidadão brasileiro sabe (ou deve saber...), de cor, o hino nacional. Convém lembrar que atores de teatro decoram peças inteiras. Sabendo a peça de cor, e não dependendo de alguém (o “ponto”) para o auxiliar, o ator fica “dono de si”, portanto, mais capaz de fazer uma boa interpretação do personagem que irá representar.

Cálculos aproximados

Voltando a falar de cálculos, é claro que não faz mais sentido, hoje em dia, insistir com os alunos para que aprendam a fazer, manualmente, cálculos como

$$3{,}21897 \times 9{,}38 \text{ ou } 2{,}801799 \div 1{,}98,$$

como era exigido de mim no 4º ano do curso primário(fundamental, atualmente). Mas, embora não tenha de fazer contas como essas, o aluno de hoje deve estar preparado para saber, por um rápido exame, que a primeira dessas contas resulta em aproximadamente $3 \times 10 = 30$, enquanto a segunda se aproxima de $2{,}8 \div 2 = 1{,}4$. Conferindo com a calculadora, vemos que a primeira dá 30,193938 e a segunda, 1,41505.

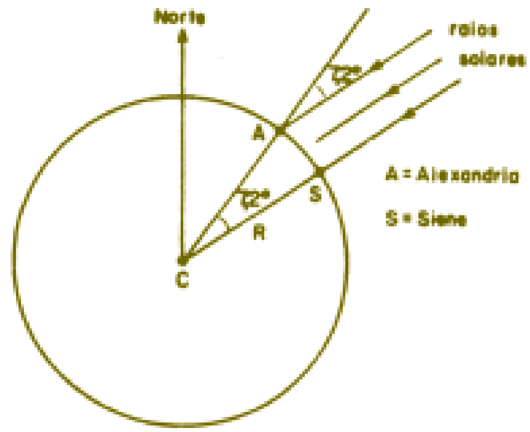
Essa questão do cálculo aproximado é muito importante e deveria merecer a devida atenção nos programas do ensino fundamental e ensino médio.

Outras habilidades de cálculo

Há certas habilidades valiosas e importantes com cálculos, que ilustraremos concretamente em dois problemas, a seguir. O primeiro deles foi, na Antiguidade, um dos grandes sucessos de aplicação da Matemática para a obtenção de um resultado decisivo para o conhecimento humano, qual seja, o tamanho do planeta em que vivemos.

Problema 5

Para calcular a circunferência terrestre, no *século III a.C.* o *sábio Eratóstenes valeu-se da distância conhecida de* 800 *km entre as localidades de Alexandria e Siena, no Egito (A e S, respectivamente, na figura), situadas no mesmo meridiano terrestre. Ele sabia que, quando em Siena os raios solares caíam verticalmente, em Alexandria eles faziam* *um ângulo de 7,2 graus com a vertical. Calcule, com esses dados, a circunferência terrestre, isto é, o comprimento de uma volta completa em torno da Terra.*



Resolução

A principal coisa na resolução desse problema é a proporcionalidade: ângulos centrais estão entre si como os arcos correspondentes determinados na circunferência. Sendo C o comprimento da circunferência, isso significa que

$$\frac{C}{800} = \frac{360}{7{,}2} \quad \text{donde} \quad \frac{800 \times 360}{7{,}2}. \qquad (1)$$

Neste ponto, antes de fazer qualquer conta, devemos notar o que pode ser simplificado: 72 é múltiplo de 36, o que nos permite cancelar o fator 36 em cima e embaixo, assim :

$$\frac{360}{7{,}2} = \frac{36 \times 100}{62} = \frac{100}{2} = 50,$$

portanto, a relação (1) nos dá:

$$C = 800 \times 50 = 40\,000 \text{ km}.$$

O raciocínio de Eratóstenes ressalta ainda a proporcionalidade de ângulos e arcos, quando vista na sua forma original, assim: se uma volta completa corresponde a 360 graus, que é 50 vezes 7,2 graus, o comprimento dessa volta também será 50 vezes 800 km, isto é, C = 40 000 km.

De posse do conhecimento da circunferência terrestre, o raio da Terra é obtido facilmente, dividindo-se o comprimento encontrado de 40 000 km por $2\pi \approx 6{,}28$, resultando, aproximadamente, 6 370 km.

A aproximação de valores numéricos, como fizemos acima no caso do ângulo (que foi propositadamente ajustado em 7,2 para facilitar os cálculos), é um procedimento que ajuda a obter estimativas rápidas e é freqüentemente usado em cálculo numérico: muitas vezes pequenas mudanças nos dados simplificam consideravelmente os cálculos.

Problema 6

Uma rampa – *como a que dá acesso* ao *Palácio do Planalto, em Brasília – tem* 4 *metros de altura* na sua parte *mais alta. Tendo começado a subi-la, uma pessoa nota que, após caminhar* 12,3 *metros sobre a rampa, está a* 1,5 *metro de altura em relação* ao *solo. Calcule quantos metros a pessoa ainda deve caminhar para atingir o ponto mais alto da rampa.*

Resolução

Uma simples figura nos mostra que, sendo x o comprimento total da rampa, vale a proporção:

$$\frac{x}{12{,}3} = \frac{4}{1{,}5}, \quad \text{donde} \quad x = \frac{12{,}3 \times 4}{5}.$$

Novamente aqui, antes de fazer qualquer cálculo, deve-se procurar simplificar: 123 e 15 são ambos divisíveis por 3, depois 40 é divisível por 5. Assim,

$$x = \frac{12{,}3 \times 4}{1{,}5} = \frac{123 \times 4}{15} = \frac{41 \times 4}{5} = \frac{4{,}1 \times 40}{5} = 4{,}1 \times 8 = 32{,}8 \text{ metros.}$$

32,8 m é o comprimento total da rampa; portanto, falta à pessoa caminhar mais 32,8 – 12,3 = 20,5 metros.

Esse problema da rampa foi proposto em um vestibular da Unicamp. Vários vestibulandos cometeram erros grosseiros de ajuste das casas decimais, encontrando para a rampa comprimento total de 328 metros ou 3,28 metros. Ora, sem fazer qualquer conta pode-se estimar o comprimento da rampa, assim desta forma: a altura total da rampa (4 metros) é pouco mais de 2 vezes a altura de 1,5 metro; logo, o comprimento total da rampa há de ser pouco mais do que o dobro de 12,3 metros, ou seja, pouco mais de 24,6 metros, o que é verdade. Um raciocínio mais preciso seria este: $4 \div 1{,}5$ está entre 2 e 3; logo, o comprimento da rampa está entre $2 \times 12{,}3 = 24{,}6$ e $3 \times 12{,}3 = 36{,}9$, ou seja, por volta de 30 metros.

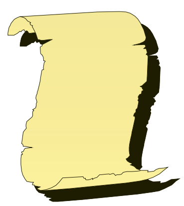
Conclusão

Os exemplos discutidos aqui já são suficientes para mostrar que há muitos cálculos interessantes que o professor pode ensinar a seus alunos. Como se vê, há vários recursos simples que muito facilitam as contas e que vão sendo aprendidos quanto mais o aluno se exercita na resolução numérica dos problemas. Portanto, não é verdade que com o advento da calculadora o professor está agora dispensado de ensinar a fazer contas. Há muito o que ensinar sobre isso, e coisas muito úteis. Se hoje em dia não há por que ocupar os alunos em trabalhosas contas de multiplicar ou dividir, como se fazia antigamente, não só as operações e suas propriedades têm de ser ensinadas, mas as técnicas de cálculo também merecem igual cuidado. Agora, quando lidamos com cálculos complicados, envolvendo raízes quadradas, logaritmos, funções trigonométricas, etc, o uso da calculadora é indispensável e se revela um “alívio” para o usuário.

O *Papiro de Rhind* e as frações unitárias

Arthur C. Almeida

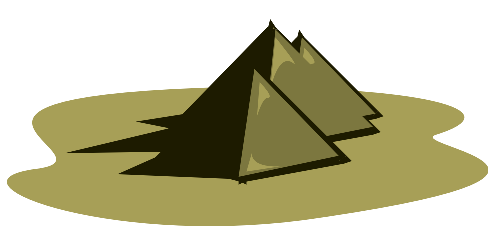
Francisco J.S. de A. Corrêa



Introdução

As origens da Matemática seguramente se perdem nas brumas da aurora da humanidade. O ser humano, desde o mais primitivo, ao abrir os olhos se dá conta das diversas formas espaciais; ao deslocar-se entre duas posições, ele o faz de forma a minimizar o seu esforço, escolhendo a distância mais curta. E, assim, esse nosso ancestral estava desenvolvendo uma forma primitiva de geometria intuitiva. No entanto, a utilização da Matemática de uma forma deliberada talvez tenha sido realizada pela primeira vez associada a processos de contagem que estavam relacionados com problemas práticos.

Nesse sentido, relacionar os elementos de uma determinada coleção ao número de dedos das mãos e dos pés pode ter sido a primeira tentativa de fazer uma contagem. Porém, se o conjunto a ser contado fosse muito grande, esse método tornar-se-ia impraticável. Nesse caso, o homem primitivo poderia valer-se de um conjunto de pedrinhas e colocá-lo em correspondência, por exemplo, com os componentes de um rebanho.



Assim fazia o personagem Polifemo, o gigante de apenas um olho da *Odisséia*, do escritor grego Homero. O gigante, morador da ilha de Cyclops, após ter sido cegado por Ulisses, postava-se todas as manhãs à entrada de uma caverna, tocando cada ovelha que dali saísse, associando-a a uma pedrinha. No final da tarde, cada ovelha que retornasse era novamente relacionada a uma pedrinha do conjunto obtido pela manhã; caso esse último fosse completamente exaurido, o gigante estaria seguro de que seu rebanho teria retornado integralmente à caverna.

Esses processos precisavam ser registrados e, para isso, o homem começou a criar símbolos de modo que os dados coletados não se perdessem. Em princípio, esses registros eram efetivados fazendo-se marcas em bastões ou em pedaços de ossos. Sobre isso transcrevemos abaixo um trecho do livro *Historia da Matemática*, Boyer, C.B.

"Poucos desses registros existem hoje, mas na Checoslováquia, foi achado um osso de lobo com profundas incisões, em número de cinqüenta e cinco; estavam dispostas em duas séries, com vinte e cinco numa e trinta na outra, com os riscos em cada série dispostos em grupos de cinco. Tais descobertas arqueológicas fornecem provas de que a idéia de número é muito mais antiga do que progressos tecnológicos como o uso de metais ou de veículos de rodas. Precede a civilização e a escrita, no sentido usual da palavra, pois artefatos com significado numérico, tais como o osso acima descrito, vêm de um período de cerca de trinta mil anos atrás."

Vê-se assim que a pré-história da Matemática recua no tempo para muito antes de Homero, cujas obras datam do século VIII a.C.

Neste artigo faremos uma ligeira incursão em um dos documentos mais antigos da História da Matemática, o *Papiro de Rhind*, ou *de Ahmes*, detendo-nos nas chamadas frações unitárias, para as quais será demonstrado um resultado que fornece uma condição necessária e suficiente para que uma fração da forma $2/p$ possa ser decomposta em uma soma de duas frações unitárias (numerador igual a 1) com denominadores diferentes de p.

As origens egípcias

Inicialmente, faremos algumas conjecturas sobre as origens da Matemática, enquanto atividade intelectual. O historiador Heródoto, assim como outros intelectuais gregos, viajou por vários lugares, entre os quais o Egito, e, sobre um certo rei egípcio de nome Sesóstris, Heródoto nos diz:

Esse rei realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de lhe ser pago todos os anos um certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o acontecido. O soberano enviava agrimensores ao local para determinar a redução sofrida pelo lote, passando o dono a pagar um tributo proporcional à porção restante. Eis, segundo me parece, a origem da geometria, que teria passado desse país para a Grécia.

Platão, em sua obra *Fedro*, também atribui aos egípcios a criação da Matemática. Mais precisamente, é dito:

Na cidade egípcia de Náucratis, existiu um antigo e famoso deus, cujo nome era Thoth; o pássaro chamado íbis lhe era consagrado e ele foi inventor de muitas artes, tais como a aritmética, a arte de calcular, a geometria, a astronomia e os dados, mas sua maior descoberta foi o uso das letras.

Aristóteles, por sua vez, sugere que a Matemática tenha origem egípcia como conseqüência da ascensão de uma classe sacerdotal, que dispunha de tempo suficiente para o estudo, contrastando, assim, com a tese de Heródoto que apontava origens práticas para a Matemática.

Independentemente da finalidade com que a Matemática surgiu, Heródoto, Platão e Aristóteles localizam sua origem no Egito, embora todos concordem com a afirmação de que a prática matemática se deu antes da civilização egípcia.

O *Papiro de Rhind* ou *de Ahmes*

No inverno de 1858, o jovem antiquário escocês A. Henry Rhind, de passagem por Luxor, cidade egípcia às margens do Nilo, adquiriu um papiro (30 cm de altura e 5 m de comprimento) que havia sido encontrado nas ruínas de uma antiga edificação em Tebas. Com a morte de Rhind, ocorrida cinco anos após, vitimado por tuberculose, o seu papiro foi adquirido pelo Museu Britânico.

Esse documento, que passou a ser chamado *Papiro de Rhind*, foi escrito por volta de 1700 a.C. por um escriba chamado Ahmes, ou Ah-mose (sendo por isso também conhecido como *Papiro de Ahmes*), por solicitação de um certo rei Hyksos, que reinou no Egito em algum período entre 1788 e 1580 a.C. Ahmes relata que o material provém de um outro manuscrito produzido em alguma época entre 2000 e 1800 a.C. Assim, o documento mais antigo da Matemática tem cerca de 4 000 anos, e sendo Ahmes a primeira figura da Matemática registrada na História.

O *Papiro de Rhind* é uma coleção ou, mais precisamente, um manual, contendo problemas práticos de natureza aritmética, algébrica e geométrica, com instruções para as soluções, sem que haja vestígio de demonstrações ou formalismos, coisas só registradas muito tempo depois pelos gregos, a partir de Thales.

Frações unitárias no *Papiro de Rhind*

No *Papiro de Rhind*, entre outros problemas, aparece uma tabela de decomposição de frações do tipo $2/p$ (p, ímpar) em frações unitárias, isto é, frações do tipo $1/x$.

Na primeira parte do *Papiro* há uma tabela contendo as frações 2/3, 2/5, ..., 2/101, representadas como uma soma de frações unitárias. Apresentamos abaixo alguns exemplos:

2/29 = 1/24 + 1/58 + 1/174 + 1/232

2/5 = 1/3 + 1/15

2/11 = 1/6 + 1/66

2/101 = 1/101 +1/202 +1/303 + 1/606

Tais conversões eram necessárias, pois, ao que parece, os egípcios sabiam operar apenas com frações unitárias e usando base decimal. No entanto, não existe nenhuma indicação sobre o processo usado para chegar a essas decomposições. Depois de investigar esse problema em particular, chegamos ao seguinte resultado, que caracteriza tal processo.

Teorema

Seja p um número ímpar maior que 2 e sejam a e b divisores de p, tais que o produto ab divida p.

Então, a fração $2/p$ pode ser decomposta em duas frações unitárias, $1/x$ e $1/y$, ou $2/p = (1/x) + (1/y)$, se, e somente se,

$$x = \frac{p}{a}\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ e } y = \frac{p}{b}\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Demonstração:

a) Consideremos as frações $1/x$ e $1/y$, onde x e y são dados como no enunciado do teorema. Nesse caso:

$$\frac{1}{\frac{p(a+b)}{2a}} + \frac{1}{\frac{p(a+b)}{2b}} = \frac{2a}{p(a+b)} + \frac{2b}{p(a+b)} = \frac{2(a+b)}{p(a+b)} = \frac{2}{p}.$$

Devemos observar que, como p é ímpar, seus divisores a e b também são ímpares, logo a soma $(a + b)$ é par, portanto $(a + b)/2$ é um número natural, bem como p/a e p/b , pois a e b são divisores de p.

b) Seja, agora, $2/p = (1/x) + (1/y)$ uma decomposição de $2/p$ em frações unitárias.

Temos então $(x + y)/xy = 2/p$ ou $2xy = p(x + y)$ e, como p é ímpar, concluímos que $(x + y)$ é par, logo existe um k natural tal que $x + y = 2k$ e

$xy = pk$. Tendo a soma e o produto desses dois números, podemos encontrá-los, através da equação do segundo grau $x^2 - 2kx + pk = 0$, cujas raízes são

$$x = k \pm \sqrt{k^2 - pk}\ .$$

Para que essas raízes sejam números naturais, a expressão

$$k^2 + pk = k(k - p)$$

deve ser um quadrado de um número natural.

Pode acontecer uma das alternativas:

k e $(k - p)$ são, ambos, quadrados.

Então $k = u^2$ e $k - p = v^2$, e teremos $k - p = u^2 - p = v^2$, de onde $p = u^2 - v^2$ ou $p = (u + v)(u - v)$. Portanto $a = u + v$ e $v = u - v$ são divisores de p, tais que $ab = p$.

Como $u = (a + b)/2$, temos, nesse caso,

$$k = (\frac{a+b}{2})^2 \quad \text{e} \quad p = ab.$$

k não é quadrado e $(k - p)$ não é quadrado.

Dividindo-se k e $(k - p)$ por d = MDC $[k,(k - p)]$, teremos $k = sd$ e $k - p = td$; como $k(k - p) = std^2$ é um quadrado, também o é st; e, como s e t são primos entre si, então $s = k/d$ e $t = (k - p)/d$ também são quadrados. Com isso, recaímos no caso obtendo

$$\frac{k}{d} = (\frac{a+b}{2})^2 \quad \text{e} \quad \frac{p}{d} = ab.$$

Substituindo os valores de k e p na expressão $k \pm \sqrt{k^2 - pk}$, teremos após alguns cálculos e simplificações os valores

$$x = \frac{p}{a}\frac{(a+b)}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{p}{b}\frac{(a+b)}{2}.$$

Corolário

Se p é um número primo, então a decomposição de $2/p$ em duas frações unitárias é única e

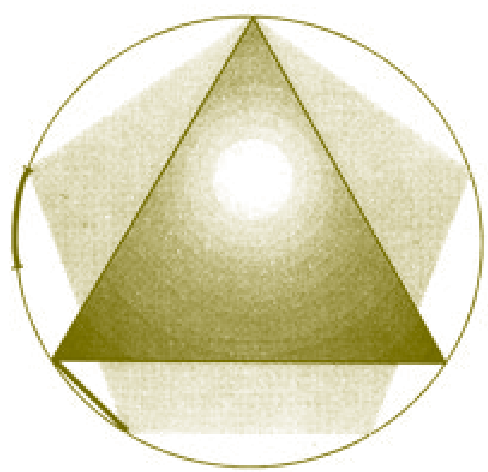
$$\frac{2}{p} = \frac{1}{\frac{p(p+1)}{2}} + \frac{1}{\frac{(p+1)}{2}}.$$

Demonstração

Como p é primo, seus únicos divisores são 1 e p. Portanto, temos $a = 1$ e $b = p$. Substituindo esses valores na forma geral, temos o resultado procurado.

Uma aplicação curiosa e inesperada desse resultado é o que veremos a seguir: uma variante da demonstração dada por Euclides (liv. IV, prop. 16) de que o pentadecágono (polígono de 15 lados) regular inscrito é construtível com régua e compasso.

Euclides constrói o triângulo equilátero inscrito e no mesmo círculo o pentágono regular inscrito, ambos com um vértice comum.



Ora, diz Euclides, o triângulo divide o círculo em terços e o pentágono em quintos; portanto, em cada arco do triângulo devemos ter 5 arcos do pentadecágono e, em cada arco do pentágono, temos 3 do pentadecágono.

Se tomarmos a diferença entre um arco do triângulo e um arco do pentágono, a partir do vértice comum, teremos 2 arcos do pentadecágono.

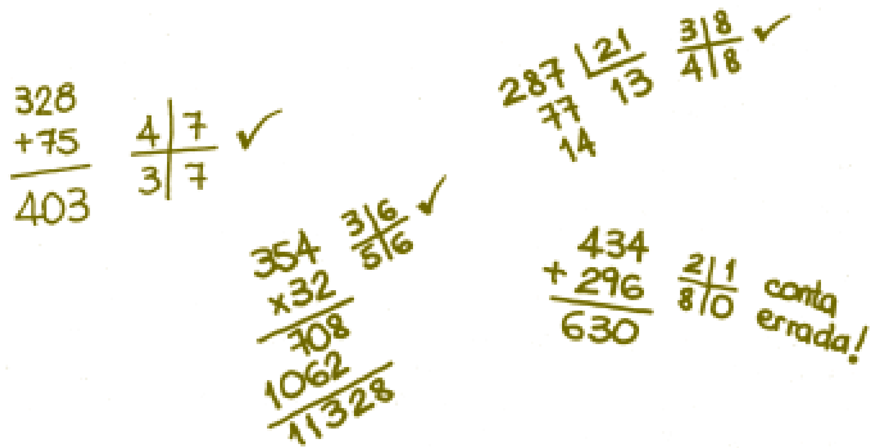
Então, a metade desse arco é o arco do pentadecágono.

Usando o resultado do *Papiro de Rhind*, basta decompor a fração $2/5 = 1/3 + 1/15$ em duas frações unitárias. Daí a medida do arco do pentadecágono, $L/15$, sendo L o comprimento da circunferência, fica $L/15 = 1\ L/5 - L/3$, isto é, o arco do pentadecágono é igual a dois arcos do pentágono menos um arco do triângulo equilátero.

A Prova dos noves

Flávio Wagner Rodrigues

Como e por que funciona (ao menos quase sempre)



Introdução

Meu pai não era matemático e acredito que nem mesmo pudesse ser classificado como um amador. Possuía, no entanto, uma inteligência acima da média e conhecimentos sólidos de Matemática elementar, adquiridos nos tempos em que militou no ensino fundamental. Em função disso, nos meus tempos de escola, ele freqüentemente resolvia junto comigo os problemas da velha *Aríthmética Progressiva* de António Trajano. Sempre que os problemas envolviam contas mais complicadas, ele me recomendava que verificasse o resultado, tirando a *prova dos noves.* Ainda hoje me lembro do dia em que perguntei ao meu pai como e por que a prova funcionava. Meu pai, com a honestidade que sempre caracterizou seu relacionamento comigo, disse:

– Por que funciona eu não sei, mas posso te dizer que, às vezes, ela falha, isto é, ela diz que a conta está certa quando, na realidade, não está.

Essa informação só serviu para aumentar a minha curiosidade, mas somente anos mais tarde consegui formular e responder às perguntas que tinham ficado sem resposta em relação à prova dos noves e que são as seguintes:

1) Por que funciona?
2) Por que prova dos noves e não dos setes, dos onzes ou dos quinzes?
3) Por que, às vezes, ela falha?

São essas as perguntas que tentaremos responder de forma acessível a estudantes do ensino fundamental, começando por definir o que seja "noves fora" e descrever a prova.

O que é o "noves fora" de um número?

"Tirar o noves fora" de um número significa tirar do número o maior múltiplo de 9 nele contido ou, o que é equivalente, achar o resto da divisão do número por 9.

Uma regra prática para achar o "noves fora" de um número é somar seus algarismos e tirar do resultado o maior múltiplo de 9 nele contido.

Por exemplo:

$$355 \rightarrow 3 + 5 + 5 = 13 \rightarrow 1 + 3 = 4$$

$$(\text{ou } 13 - 9 = 4)$$

355: "noves fora 4" (e 4 *é* o resto da divisão de 355 por 9)

$426 \rightarrow 4 + 2 + 6 = 12 \rightarrow 1 + 2 = 3$

$$(\text{ou } 12 - 9 = 3)$$

426: "noves fora 3" (e 3 *é* o resto da divisão de 426 por 9)

$4\,372 \rightarrow 4 + 3 + 7 + 2 = ... = 7$

4 372: "noves fora 7" (e 7 *é* o resto da divisão de 4 372 por 9)

Não é uma simples coincidência a relação entre a soma dos algarismos de um número e o resto de sua divisão por 9, pois um número n e a soma dos seus algarismos, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. Vamos ilustrar esse fato com o número 355.

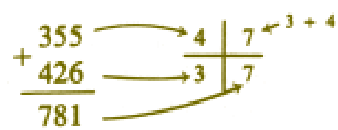
$$355 = 3 \times 10^2 + 5 \times 10 + 5 = 3 + 5 + + 5 + 3 \times (10^2 - 1) + 5 \times (10 - 1) =$$
$$= 13 + 3 \times 99 + 5 \times 9$$

Como 9 e 99 são múltiplos de 9, segue-se que 355 e a soma de seus algarismos, 13, ao serem divididos por 9, deixam o mesmo resto. O argumento vale para um número n qualquer, uma vez que, para todo $i \geq 1$, $10^i - 1$ é múltiplo de 9. Portanto, ao somarmos os algarismos de um número n, jogando os "noves fora" estamos de fato determinando o resto da divisão de n por 9.

A prova dos "noves fora"

Como funciona?

No caso da adição:



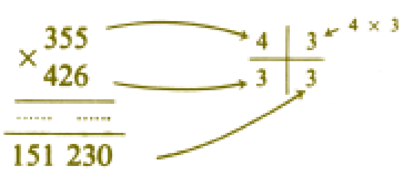
355, "noves fora" 4

426, "noves fora" 3

(se o "noves fora" de 4 + 3 e o de 781 forem iguais, a conta receberá o "selo de aprovação" da prova dos noves)

4 + 3 = 7, noves fora 7; 781, noves fora 7. *Aprovado.*

No caso da multiplicação:



355, "noves fora" 4

426, "noves fora" 3

(se o "noves fora" de 4×3 e o de 151 230 forem iguais, a conta receberá o "selo de aprovação" da prova dos noves)

$4 \times 3 = 12$, "noves fora" 3; 151 230, "noves fora" 3. *Aprovado.*

Por que funciona?

Vamos justificar a prova no caso da multiplicação e o leitor se convencerá que um argumento análogo vale para a adição.

Sejam dados dois números n_1 e n_2, que divididos por 9 deixam restos, respectivamente, iguais a r_1 e r_2. Nessas condições, podemos escrever:

$$n_1 = 9q_1 + r_1; \;\; n_2 = 9q_2 + r_2$$

Segue-se, portanto, que:

$$n_1n_2 = 81q_1q_2 + 9q_1r_2 + 9q_2r_1 + r_1r_2 = 9Q + r_1r_2$$

A última igualdade nos permite concluir que n_1n_2 e r_1r_2, quando divididos por 9, deixam o mesmo resto. O princípio de funcionamento da prova dos noves fica, dessa maneira, completamente explicado. O que ela faz é substituir a operação $n_1 \times n_2$ por $r_1 \times r_2$, e verificar se, quando divididos por 9, eles deixam o mesmo resto. Se isso não ocorrer, uma das duas (ou ambas as) operações está errada. Dada a simplicidade da determinação de r_1 e r_2 e do produto $r_1 \times r_2$ (afinal os dois números são menores do que 9), é muito mais provável que o erro esteja na operação original.

Por que a prova dos noves?

Não há nenhuma restrição teórica em utilizarmos, por exemplo, uma prova dos quinzes. A dificuldade é essencialmente de ordem prática, pois o resto da divisão de um número por 15 não é obtido tão simplesmente quanto o resto da divisão por 9.

Resumindo, usamos a prova dos noves porque a base do nosso sistema de numeração é 10 e para todo $i \geq 1$, 10^i, dividido por 9 deixa o resto 1. Se a base do nosso sistema fosse, por exemplo, 12, nós provavelmente estaríamos aqui discutindo a prova dos onzes e não dos noves.

Por que, às vezes, ela falha?

Em primeiro lugar vamos observar que se uma conta estiver certa e a prova dos noves for executada corretamente, ela irá sempre confirmar a exatidão da resposta. A possibilidade de falha ocorre quando a conta está errada e a prova não é capaz de detectar o erro. Da discussão feita acima, segue-se facilmente que isso irá ocorrer se e somente se o resultado obtido e o resultado correto diferem por um múltiplo inteiro de 9. De fato, se a resposta dada para a multiplicação 355×426 fosse 151 140, o nosso erro não seria detectado pela prova dos noves.

O leitor mais atento observará também que uma inversão na ordem dos algarismos do resultado não será detectada pela prova, uma vez que a ordem das parcelas não altera a soma. De fato, a prova dos noves não saberá distinguir 115 320 do resultado correto, 151 230, da operação 355 × 426. Observe, no entanto, que essa não é uma situação nova, pois 151 230 – 115 320 = 35 910, que é um múltiplo inteiro de 9.

Comentários finais

Na era do computador e das minicalculadoras, uma discussão sobre a prova dos noves pode parecer anacrônica e inútil. De fato, as gerações futuras dificilmente irão utilizá-las no seu dia-a-dia. No entanto, acreditamos que continuaremos sempre a ensinar operações aritméticas sem o uso de máquinas e o assunto "prova dos noves" pode servir para motivar o estudo de sistemas de numeração.

Vamos concluir com duas perguntas, uma de rotina e outra para estimular a imaginação de seus alunos:

1) Como tirar a "prova dos noves" numa divisão? (aproveite a oportunidade para recordar:

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \Longleftrightarrow a = bq + r)$$

2) Num país que usa a base 10 no seu sistema de numeração, mas no qual o 9 é um número sagrado e a sua utilização para fins profanos é terminantemente proibida, do ponto de vista prático, qual seria a melhor escolha para substituir a prova dos noves fora?

Ano Bissexto

Vincenzo Bongiovanni

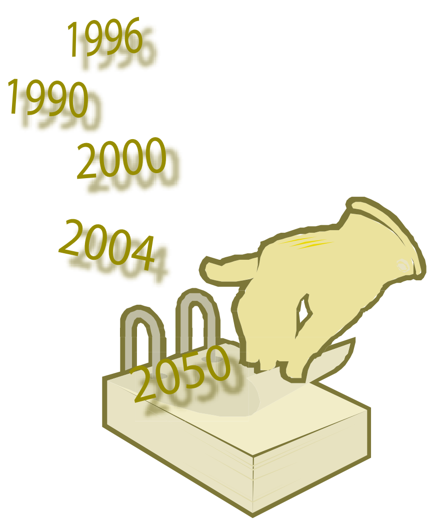
Em nosso calendário, os anos têm 365 dias e os chamados anos bissextos têm um dia a mais. Atualmente, são anos bissextos aqueles indicados por um número *divisível por* 4 *que* não termine em 00 *ou, se termin*ar em 00, que seja *divisível* por 400.

Mas ... de onde veio essa regra?

Achei a resposta no excelente livro de Roberto Boczko, *Conceitos de Astronomia*, Editora Edgard Blücher**,** da qual faço aqui um resumo.

Em épocas remotas, o ano tinha 365 dias. Com o passar do tempo, entretanto, percebeu-se que as estações aconteciam em datas diferentes de ano para ano. Isto significava que o tempo para a Terra completar uma volta em torno do Sol não era de 365 dias e a defasagem estava se acumulando.

Para corrigir isso, um astrônomo, no ano 238 a.C, sugeriu o acréscimo de 1 dia no calendário a cada 4 anos. Sua sugestão não foi aceita.



No ano 46 a.C, Júlio César, sob a orientação do astrônomo Sosígenes, resolveu fazer esse acréscimo: o ano 46 a.C. teve 80 dias a mais, para corrigir os desvios acumulados e o ano 45 a.C. foi bissexto, isto é, teve 366 dias. Mas só a partir do ano 8 da era cristã é que as intercalações desse dia a mais passaram a ser feitas rigorosamente de 4 em 4 anos.

O ano Juliano considerava, então, que uma volta da Terra em torno do Sol levasse 365 dias + 1/4 (= 365,25).

Com o passar do tempo, entretanto, voltaram a surgir defasagens, com certas implicações nos ritos religiosos. Os astrônomos, melhorando seus conhecimentos e seus instrumentos, concluíram que a volta da Terra em torno do Sol durava 365,2425 dias.

Em vista disso, em 1582, o papa Gregório XIII propôs uma reforma no calendário Juliano. Sendo

$$365{,}2425 = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$$

a correção deveria, ser de 1 dia a mais a cada 4 anos, menos 1 a cada 100 e mais 1 a cada 400.

Daí a regra válida atualmente.

Para corrigir discrepâncias que já ocorriam, foram descontados 10 dias no mês de outubro de 1582. O ano de 365,2425 dias passou a ser chamado ano Gregoriano.

Acontece que a precisão dos instrumentos continua a ser aperfeiçoada e hoje se calcula o período em que a Terra dá uma volta ao redor do Sol como sendo aproximadamente igual a 365,242199 dias.

$$365{,}242199 \approx 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{1}{3300}$$

Isso quer dizer que a regra atual vai merecer uma correção com a retirada de 1 dia do calendário a cada 3 300 anos a contar de 1582. E isto deverá acontecer pela primeira vez em 4882.

Conceitos e controvérsias

Elon Lages Lima

Minha intenção aqui é a de apresentar opiniões e esclarecimentos sobre pontos controvertidos, duvidas, dificuldades e questões em geral que preocupem o professor de Matemática. Os assuntos de que tratarei, gostaria que fossem sugeridos pelo leitor, motivados por seu desejo de aprimorar-se, provocados por sua curiosidade, suscitados às vezes por sua perplexidade diante de opiniões divergentes. Prefiro e darei sempre prioridade a questões relativas à Matemática propriamente dita, embora possa eventualmente discutir problemas correlatos, como os didáticos, por exemplo.

Vamos começar com algumas perguntas que me foram feitas, em diferentes ocasiões e lugares, por pessoas interessadas em ensinar Matemática.

Zero é um número natural?

Sim e não. Incluir ou não o número 0 no conjunto N dos números naturais é uma questão de preferência pessoal ou, mais objetivamente, de convivência. O mesmo professor ou autor pode, em diferentes circunstâncias, escrever $0 \in N$ ou $0 \notin N$ como assim?

Consultemos um tratado de Álgebra. Praticamente em todos eles encontramos $N = \{0, 1, 2,...\}$. Vejamos um livro de Análise. Lá acharemos quase sempre $N = \{1, 2, 3,...\}$

Por que essas preferências? É natural que o autor de um livro de Álgebra, cujo principal interesse é o estudo das operações, considere zero como um numero natural pois isto lhe dará um elemento neutro para a adição de números naturais e permitirá que a diferença $x - y$ seja uma operação com valores em N, não somente quando $x > y$ mas também se $x = y$. Assim, quando o algebrista considera zero como número natural, está facilitando a sua vida, eliminando algumas exceções.

Por outro lado, em Análise, os números naturais ocorrem muito freqüentemente como índices de termos numa seqüência. Uma seqüência (digamos, de números reais) é uma função x: $N \rightarrow$ R, cujo domínio é o conjunto N dos números naturais. O valor que a função x assume no número natural n é indicado com a notação x_n (em vez de $x(n)$) e é chamado o "n-ésimo termo" da seqüência. A notação $(x_1, x, \ldots x_n,\ldots)$ é usada para representar a seqüência. Aqui, o primeiro termo da seqüência é x_1, o segundo é x_2 e assim por diante. Se fôssemos considerar $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ então a seqüência seria $(x_0, x_1, x_2,\ldots x_n,\ldots)$, na qual o primeiro termo é x_0, o segundo é x_1, etc. Em geral, x_n não seria o n-ésimo e sim o $(n + 1)$-ésimo termo. Para evitar essa discrepância, é mais conveniente tomar o conjunto dos números naturais como $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Para encerrar este tópico, uma observação sobre a nomenclatura matemática. Não adianta encaminhar a discussão no sentido de examinar se o número zero é ou não "natural" (em oposição a "artificial"). Os nomes das coisas em Matemática não são geralmente escolhidos de modo a transmitirem uma idéia sobre o que devem ser essas coisas. Os exemplos abundam: um número "imaginário" não é mais nem menos existente do que um número "real"; "grupo" é uma palavra que não indica nada sobre seu significado matemático e, finalmente, "grupo simples" é um conceito extremamente complicado, a ponto de alguns de seus exemplos mais famosos serem chamados (muito justamente) de "monstros".

Por que (–1)(–1) = 1?

Meu saudoso professor Benedito de Moraes costumava explicar, a mim e a meus colegas do segundo ano ginasial (atual ensino fundamental), as "regras de sinal" para a multiplicação de números relativos, da seguinte maneira:

1ª) o amigo do meu amigo é meu amigo, ou seja, (+)(+) = +;

2ª) o amigo do meu inimigo é meu inimigo, isto é, (+)(–) = –;

3ª) o inimigo do meu amigo é meu inimigo, quer dizer, (–)(+) = –;

e, finalmente,

4ª) o inimigo do meu inimigo é meu amigo, o que significa (–)(–) = +.

Sem dúvida esta ilustração era um bom artifício didático, embora alguns de nós não concordássemos com a filosofia maniqueísta contida na justificação da quarta regra (podíamos muito bem imaginar três pessoas inimigas entre si).

Considerações sociais à parte, o que os preceitos acima dizem é que multiplicar por –1 significa "trocar o sinal" e, evidentemente, trocar o sinal duas vezes equivale a deixar como está. Mais geralmente, multiplicar por $-a$ quer dizer multiplicar por $(-1)\ a$, ou seja, primeiro por a e depois por –1, logo multiplicar por $-\ a$ é o mesmo que multiplicar por a e depois trocar o sinal. Daí resulta que $(-a)(-b) = ab$.

Tudo isto está muito claro e as manipulações com números relativos, a partir daí, se desenvolvem sem maiores novidades. Mas, nas cabeças das pessoas mais inquiridoras, resta uma sensação de "magister dixit", de regra outorgada pela força. Mais precisamente, insinua-se a dúvida: será possível *demonstrar,* em vez de impor, que $(-1)(-1) = 1$?

Não se pode demonstrar algo a partir do nada. Para provar um resultado, é preciso admitir uns tantos outros fatos como conhecidos. Esta é a natureza da Matemática. Todas as proposições matemáticas são do tipo "se isto, então aquilo". Ou seja, admitindo isto como verdadeiro, provamos aquilo como conseqüência. Feitas estas observações filosóficas, voltemos ao nosso caso. Gostaríamos de provar que $(-1)(\ -1) = 1$. Que fatos devemos admitir como verdadeiros para demonstrar, a partir deles, esta igualdade?

De modo sucinto, podemos dizer que $(-1)(-1) = 1$ é uma conseqüência da lei distributiva da multiplicação em relação à adição, conforme mostraremos a seguir.

Nossa discussão tem lugar no conjunto Z dos números inteiros (relativos), onde cada elemento a possui um simétrico (ou inverso aditivo) $-\ a$, o qual cumpre a condição $-\ a + a = a + (-a) = 0$. Daí resulta que simétrico $-\ a$, é caracterizado por essa condição. Mais explicitamente, se $b + x = 0$, então $x = -b$, como se vê somando $-\ b$ a ambos os membros. Em particular, como $-\ a + a = 0$, concluímos que $a = -(-a)$, ou seja, que o simétrico de $-a$ é a.

Uma primeira conseqüência da distributividade da multiplicação é o fato de que a.0 = 0, seja qual for o número a.

Com efeito, $a + a.0 = a\ .1 + a.0 = a\ (1 + 0) = a.1 = a = a + 0.$

Assim, $a + a.0 = a + 0$, logo $a\ .0 = 0.$

Agora podemos mostrar que $(-1).a = -a$ para todo número a.

Com efeito, $a + (-1).\ A = 1.a + (-1)a = [1+ (-1)].a = 0.a = 0.$

Logo, $(-1).a$ é o simétrico de a, ou seja, $(-1)a = -a$.

Em particular, $(-1)(-1) = -(-1) = 1$.

Daí resulta, em geral que $(-a)(-b) = ab$,

pois $(-a).(-b) = (-1)a.(-1)b = (-1)(-1)ab = ab$.

Qual o valor de 0^0?

A resposta mais simples é: 0^0 é uma expressão sem significado matemático. Uma resposta mais informativa seria: 0^0 é uma expressão indeterminada.

Para explicar estas respostas, talvez seja melhor examinar dois exemplos mais simples de fórmulas desprovidas de significado matemático, que são

$$\frac{0}{0} \text{ e } \frac{1}{0} \,.$$

De acordo com a definição de divisão, $\frac{a}{b} = c$ significa que $a = bc$. Portanto, se escrevêssemos $\frac{0}{0} = x$ e $\frac{1}{0} = y$,

estas igualdades significariam que $0 = 0.x$ e $1 = 0.y$. Ora, TODO número x é tal que $0.x = 0$ e NENHUM número y é tal que $0.\ y = 1$. Por isso se diz que $\frac{0}{0}$ é uma "expressão indeterminada" e que $\frac{1}{0}$ é uma "divisão impossível". (Mais geralmente, toda divisão do tipo $\frac{a}{0}$ com $a \neq 0$ é impossível.)

Voltando ao símbolo 0^0, lembramos que as potências de expoente zero foram introduzidas a fim de que a fórmula

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \,,$$

que é evidente quando $m > n$, continue ainda válida para $m = n$. Pondo $a^m = b$, teremos então

$$\frac{b}{b} = b^0 \,,$$

logo $b^0 = 1$ se $b \neq 0$. No caso $b = 0$, a igualdade $\frac{b}{b} = b^0$

tomaria a forma

$$\frac{0}{0} = 0^0 ,$$

o que leva a considerar 0^0 como uma expressão indeterminada. Esta conclusão é ainda reforçada pelo seguinte argumento: como $0^y = 0$ para todo $y \neq 0$, seria natural pôr $0^0 = 0$; por outro lado, como $x^0 = 1$ para todo $x \neq 0$ seria também natural por $0^0 = 1$. Logo, o símbolo 0^0 não possui um valor que se imponha naturalmente, o que nos leva a considerá-lo como uma expressão indeterminada.

As explicações acima têm caráter elementar e abordam o problema das expressões indeterminadas a partir da tentativa de estender certas operações aritméticas a casos que não estavam enquadrados nas definições originais dessas operações. Existe, porém, uma razão mais profunda, advinda da teoria dos limites, em virtude da qual

$$\frac{0}{0}$$

e 0^0, (bem como outras fórmulas análogas) são expressões indeterminadas.

Nosso quarto tópico é uma pergunta enviada por uma professora de Piraju, SP. Podemos resumi-la assim:

Qual a diferença entre círculo e circunferência?

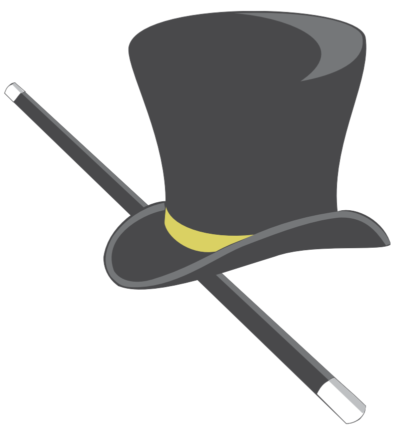
Explica a professora que os guias curriculares para as matérias do ensino fundamental orientam os professores a não fazer distinção entre circunferência e círculo, alegando que não há tal diferenciação no caso de polígonos (fala-se tanto no *perímetro* como na área de um polígono). Mas todos os livros de ensino médio que a professora já viu fazem a distinção: circunferência é a linha, círculo é a região limitada pela circunferência. Daí sua perplexidade.

No meu caso pessoal, ocorreu o oposto, ou quase. No ensino fundamental e no ensino médio me ensinaram a distinguir entre circunferência e círculo. Na universidade, e em livros estrangeiros mais avançados, essa diferença desapareceu. Para ser mais exato, o que desapareceu quase inteiramente foi a palavra "circunferência". Quanto ao termo "círculo" ele tornou-se ambíguo (como "polígono"); ora quer dizer a curva, ora a região por ela limitada.

Para livrar-se da ambigüidade, quando necessário, costuma-se usar a palavras "disco" para significar a região do plano limitada por uma circunferência . Aí não resta dúvidas.

Fazendo mágica com a Matemática

Oscar Guelli



Às vezes me vêm à lembrança os tempos de escola. Quem é que não teve um colega de classe como o Alberto?

Primeiro aluno da turma, Alberto sempre se adiantava para responder às perguntas dos professores. E era incrível: suas respostas eram sempre certas e precisas!

Alberto era brilhante em Matemática. Por isso, naquela manhã quando o professor Aldo chamou Alberto à lousa, dizendo que iria fazer uma mágica de Matemática, a agitação tomou conta da classe.

– Alberto, escolha um número de dois algarismos.

– 36.

– Multiplique este número por 15.

$$36 \times 15 = 540$$

– Agora multiplique o resultado por 7.

$$540 \times 7 = 3780$$

– Subtraia deste resultado o quádruplo do número escolhido.

$$3780 - (4 \times 36) = 3780 - 144 = 3636$$

– Veja o resultado, Alberto. Você repetiu o 36.

Alberto começava a ficar interessado.

0 professor Aldo pediu-lhe, então, que escolhesse outro número de dois algarismos.

– 45.

– Multiplique este número por 15.

$$45 \times 15 = 675$$

– Agora multiplique o resultado por 7.

$$675 \times 7 = 4725$$

– Diminua do resultado o quádruplo do número.

$$4725 - (4 \times 45) = 4725 - 180 = 4545$$

A classe estava eufórica. Alberto observava com atenção os cálculos. Estava prestes a descobrir o truque.

Mas o professor Aldo não lhe deu tempo. E dessa vez mudou os números.

– Escolha outro número de dois algarismos, Alberto.

– 63.

– Multiplique este número por 13.

Alberto ficou surpreso. Já não era mais para multiplicar por 15. Com certeza a troca do número 15 pelo número 13 impediu que naquele instante Alberto descobrisse o truque.

$$63 \times 13 = 819$$

– Agora multiplique o resultado por 8.

$$819 \times 8 = 6552$$

– Diminua do resultado o triplo do número.

$$6552 - (3 \times 63) = 6552 - 189 = 6363$$

Grande professor Aldo! Foi realmente uma mágica brilhante!

A explicação é bem simples. Observe estes dois quadros:

O prof. Aldo diz	Alberto calcula	O prof. Aldo diz	Alberto calcula
Escolha um número de dois algarismos	x	Escolha um número de dois algarismos	x
Multiplique o número por 15	$15x$	Multiplique o número por 13	$13x$
Multiplique o resultado por 7	$7(15x) = 105x$	Multiplique o resultado por 8	$8(13x) = 104x$
Diminua do resultado o quádruplo do número original.	$105x$ $4x$ = l0lx	Diminua do resultado o triplo do número original.	$104x – 3x$ = l0lx

De uma forma ou outra, o professor Aldo fazia Alberto multiplicar o número escolhido sempre por 101. Veja o que acontece quando multiplicamos qualquer número de dois algarismos por 101:

$$45 \times 101 = 45 \times (100 + 1) = 45 \times 100 + 45 \times 1 = 4500 + 45 = 4545$$

$$72 \text{ x } 101 = 72 \text{ x } (100 + 1) = 72 \times 100 + 72 \times 1 = 7200 + 72 = 7272$$

No dia seguinte Alberto procurou o professor Aldo pelo colégio inteiro. Queria a todo custo contar-lhe que havia descoberto o truque. Tentou várias vezes nos explicar como havia conseguido. Foi inútil. Para nós era uma mágica, e pronto!

$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ A fórmula é de BHASKARA ?

O hábito de dar o nome de *Bhaskara* para a fórmula de resolução da equação do $2^{\underline{o}}$ grau se estabeleceu no Brasil por volta de 1960. Esse costume, aparentemente só brasileiro (não se encontra o nome de *Bhaskara* para essa fórmula na literatura internacional), não é adequado pois:

Problemas que recaem numa equação do segundo grau já apareciam, há quase quatro mil anos, em textos escritos pelos babilônios. Nesses textos o que se tinha era uma receita (escrita em prosa, sem uso de símbolos) que ensinava como proceder para determinar as raízes em exemplos concretos com coeficientes numéricos.

Bhaskara que nasceu na índia em 1114 e viveu até cerca de 1185, foi um dos mais importantes matemáticos do século 12. As duas coleções de seus trabalhos mais conhecidas são *Lilavati* ("bela") e *Vijaganita* ("extração de raízes"), que tratam de aritmética e álgebra, respectivamente, e contêm numerosos problemas sobre equações lineares e quadráticas (resolvidas também com receitas em prosa), progressões aritméticas e geométricas, radicais, tríadas pitagóricas e outros.

Até o fim do século 16 não se usava uma fórmula para obter as raízes de uma equação do segundo grau, simplesmente porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isso começou a ser feito a partir de François Viète, matemático francês que viveu de 1540 a 1603.

Logo – embora não se deva negar a importância e a riqueza da obra de *Bhaskara* –, não é correto atribuir a ele a conhecida fórmula de resolução da equação do $2^{\underline{o}}$ grau.

Um método para o cálculo do MDC e do MMC

Roberto Ribeiro Paterlini

Introdução

Antes de apresentarmos um novo método para o cálculo do MDC e do MMC de dois números, vamos recordar algumas definições: dados os números naturais a e b, seu MDC (= *máximo divisor comum)* é, como o próprio nome indica, o maior dos números que dividem tanto a quanto b. Enquanto seu MMC (= *mínimo múltiplo comum)* é o menor dentre todos os números positivos que sejam, simultaneamente, múltiplos de a e de b. O número 1 é divisor de qualquer número e, se os números a e b não admitem outro divisor comum, tem-se que MDC $(a, b) = 1$ e diz-se, então, que a e b são *primos entre si.*

O MDC e o MMC aparecem em vários resultados teóricos e na resolução de problemas, mas, nos nossos cursos, sua mais comum aplicação é no cálculo com frações ordinárias. Embora nesse contexto sua utilização seja dispensável –, ao preço de trabalharmos, às vezes, com números maiores –, é na hora de simplificar frações que os textos didáticos usam o MDC e é na hora de comparar, somar ou subtrair frações, que aparece o MMC.

Cálculo de MDC e de MMC

Se os números a e b estão decompostos em fatores primos, é fácil encontrar a decomposição em fatores primos de seu MDC e seu MMC. Como exemplo, consideremos os números 2 100 e 198. Ora, como

$$2\,100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \ \text{ e } \ 198 = 2 \cdot 3^2 \cdot 11,$$

qualquer divisor comum a 2 100 e 198 só pode ter 2 e 3 como fatores primos e somente com expoentes 0 ou 1. O maior de todos será, então, 2×3, isto é

$$\text{MDC}\ (2\,100, 198) = 2 \times 3 = 6.$$

Daí, a regra já conhecida: o MDC é o produto dos fatores primos que aparecem tanto na decomposição de *a* quanto na de *b*, cada um deles elevado ao *menor* dos dois expoentes com que aí aparece.

Analogamente, qualquer múltiplo comum a 2 100 e 198 deve ter como fatores primos: 2 (com expoente ≥ 2), 3 (com expoente ente ≥ 2), 5 (com expoente ente ≥ 2), 7 (com expoente ≥ 1) e 11 (com expoente ≥ 1) . Logo, o menor deles deve ser $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$, isto é, MMC (2 100, 198) = $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69\,300$.

Daí, a regra: o MMC é o produto de todos os fatores primos que aparecem na decomposição de *a* ou na de *b,* cada um deles elevado ao *maior* expoente com que aparece.

O método mais conhecido para o cálculo do MMC de dois ou mais números naturais utiliza a decomposição simultânea em números primos. O método é, geralmente, implementado mediante a disposição exemplificada ao lado. E daí, novamente, tem-se

2 100	198	2
1 050	99	2
525	99	3
175	33	3
175	11	5
35	11	5
7	11	7
1	11	11
1	1	

$$\text{MMC}\ (2\,100, 198) = 2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11 = 69\,300.$$

O outro método

Uma variação deste método simplifica os cálculos e fornece, ao mesmo tempo, o MMC e o MDC dos números. Exemplificamos, calculando o MMC e o MDC dos mesmos números 2 100 e 198:

2 100	198	2
1 050	99	3
350	33	

Tem-se MDC (2 100, 198) = $2 \times 3 = 6$ e

MMC (2 100, 198) = $6 \times 350 \times 33 = 69\,300$.

Descrição do novo método

Nesta disposição, um número primo comparece na coluna da direita apenas quando divide *ambos* os números à sua esquerda, na mesma linha. As divisões terminam quando isto não mais for possível, o que significa que encontramos dois números primos entre si nas duas colunas da esquerda.

O MDC é o produto dos primos que estão na coluna da direita, e o MMC, o produto deste mdc pelo dos números primos entre si, que restaram na última linha à esquerda.

Justificativa do novo método

Colocando na coluna da direita só os primos que dividem ambos os números da esquerda, estamos, certamente, relacionando fatores primos do MDC. Levando o processo até chegarmos a 2 números primos entre si (que não admitem mais nenhum divisor comum a não ser o 1), teremos esgotado os fatores primos do MDC. Assim, o produto $2 \times 3 = 6$ dos primos da coluna da direita é o MDC dos números dados inicialmente.

Por outro lado, devido à maneira como se chegou aos números primos entre si, 350 e 33, tem-se que $2\,100 = 6 \times 350$ e $198 = 6 \times 33$. Então, qualquer múltiplo de 2 100 deve conter os fatores 6 e 350, e qualquer múltiplo de 198 deve conter os fatores 6 e 33; logo, o menor de todos os múltiplos comuns é aquele que se obtém do produto dos fatores 6, 350 e 33. (O leitor observa que é, nesse ponto, que entra o fato de 350 e 33 serem primos entre si, pois se houvesse, ainda, um número diferente de 1, dividindo 6, 350 e 33, então o produto dos três não seria o menor dos múltiplos comuns.)

Observações

1. Os argumentos acima, para justificar o método, no caso particular estudado do cálculo do MDC e do MMC de 2 100 e 198, se transportam ao caso geral de dois números quaisquer a e b, sem mudanças significativas, mas sob uma notação muito carregada, a partir da decomposição em fatores primos de a e de b.

   Por isso, deixamos de apresentá-la aqui.

2. Este método se aplica, também, ao cálculo do MDC e do MMC de mais do que dois números. Deixamos ao leitor a tarefa de fazer as devidas (e poucas) adaptações nos argumentos apresentados.

3. A justificativa exposta acima põe à mostra uma relação importante entre o MDC, o MMC e o produto de dois números. Com efeito, revendo o processo apresentado, o leitor deduzirá que

   $a \times b = \text{MMC } (a, b) \times \text{MDC } (a, b)$,

ou, na forma como é mais utilizada,

$$MMC \ (a,b) = \frac{a \times b}{MDC \ (a,b)}.$$

Uma disposição simplificada do novo método

Uma outra disposição de utilização desse mesmo processo é a seguinte: forma-se uma fração com os dois números dos quais se pretende calcular o MDC e o MMC. Vai-se simplificando a fração (por divisão pelos fatores primos comuns, de preferência na ordem, para que não se deixe escapar algum) até chegarmos a uma fração irredutível (isto é, com numerador e denominador primos entre si), tendo o cuidado de, a cada passo, anotar (por exemplo, abaixo do sinal de =) o número pelo qual foram divididos os termos da fração. No final do processo, o MDC é o produto dos números anotados abaixo do sinal de = , e o MMC é o produto deste MDC pelo numerador e pelo denominador da fração irredutível. Ou seja,

$$\frac{2100}{198} \underset{2}{=} \frac{1050}{99} \underset{3}{=} \frac{350}{33}$$

donde MDC (2 100, 198) = 2 × 3 = 6

e MMC (2 100, 198) = 6 × 33 × 350 = 69 300.

É claro que o processo acima se torna redundante se estamos procurando o MDC entre numerador e denominador de uma fração para efeito de simplificá-la. Isto só reforça, entretanto, a idéia de que não é nesse contexto que o MDC apresenta sua força como ferramenta matemática.

Outros Critérios de Divisibilidade

Mário Gustavo Pinto Guedes

O objetivo principal de escrever e enviar este trabalho foi o de oferecer alguns "critérios" de divisibilidade fáceis, porém não mnemônicos. Acompanha o trabalho uma tabela que permitirá a qualquer aluno verificar, com facilidade, se um dado número é, ou não, divisível por um dado número primo (entre 7 e 100).

Concordo com os professores quando afirmam que *um critério de divisibilidade só é útil quando for mais simples que a própria divisão;* portanto, fica a critério de cada um dos colegas aplicar esta sugestão em suas escolas.

Nº primo	Forma aditiva	Forma subtrativa	Nº primo	Forma aditiva	Forma subtrativa
7	$a + 5b$	$a - 2b$	47	$a + 80b$*	$a - 14b$
11	$a + 10b$	$a - b$	53	$a + 16b$	$a - 90b$*
13	$a + 4b$	$a -$ [illegible]b	59	$a + 6b$	$a - 53b$
17	$a + 12b$	$a - 5b$	61	$a + 55b$	$a - 6b$
19	$a + 2b$	$a - 17b$	67	$a + 47b$	$a - 20b$
23	$a + 7b$	$a - 16b$	71	$a + 64b$	$a - 7b$
29	$a + 3b$	$a - 26b$	73	$a + 22b$	$a - 51b$
31	$a + 90b$*	$a - 3b$	79	$a + 8b$	$a - 71b$
37	$a + 26b$	$a - 11b$	83	$a + 25b$	$a - 58b$
41	$a + 37b$	$a - 4b$	89	$a + 9b$	$a - 80b$
43	$a + 13b$	$a - 30b$	97	$a + 68b$	$a - 29b$

*90, 80 e 90 foram colocados na tabela no lugar dos números menores 28, 33, 37, respectivamente, porque dão maior agilidade ao processo.

As regras

Dado um número *n,* seja *b* seu algarismo das unidades e *a* o número formado pelos demais algarismos. Por exemplo, se $n = 33684$, $a = 3368$ e $b = 4$.

Então *n* será divisível por 7 se, e só se, $a + 5b$ for divisível por 7.

A tabela anterior permite reformular esta regra para obter critérios de divisibilidade pelos números primos entre 7 e 100. Ela permite, ainda, o uso de dois "métodos" que chamei de *aditivo* e *subtrativo.*

Exemplos

Divisibilidade por 7

Ex.: 33684

Na tabela: forma aditiva ($a + 5b$), começando com $b = 4$ e $a = 3368$,

$$\begin{array}{r l}
3368 & \rightarrow 4 \\
+20 & \leftarrow 4 \times 5 \\
\hline
3388 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
338 & \rightarrow 8 \\
+40 & \leftarrow 8 \times 5 \\
\hline
378 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r l}
37 & \rightarrow 8 \\
+40 & \leftarrow 8 \times 5 \\
\hline
77 &
\end{array}$$

77 é múltiplo de 7, logo 33684 também o é, assim como 378 e 3388.

Para tornar ainda mais prático o procedimento, faremos os cálculos em seqüência, separando mentalmente a ordem das unidades. Ilustraremos também a "forma subtrativa" ($a - 2b$), com o mesmo número 33684:

Forma aditiva: $a + 5b$

$$\begin{array}{r l}
3368\,(4) & \\
+20 & \\
\hline
338(8) & \\
+40 & \\
\hline
37(8) & \\
+40 & \\
\hline
77 & \rightarrow 77 \text{ é divisível por } 7
\end{array}$$

Forma subtrativa: $a - 2b$

$$\begin{array}{r l}
3368\,(4) & \\
-8 & \\
\hline
336(0) & \\
-0 & \\
\hline
33(6) & \\
-12 & \\
\hline
2(1) & \\
-2 & \\
\hline
0 & \rightarrow \text{ é divisível por } 7
\end{array}$$

Ao apresentar as duas formas aos meus alunos, deixo à escolha a que lhes for mais conveniente. Porém a “forma subtrativa” tem como grande inconveniente o fato de que o aluno já deve estar familiarizado com operações no conjunto **Z**. Aqui no Rio de Janeiro, os critérios de divisibilidade são ensinados na 5ª série, e operações com número inteiros, na 6ª série, o que não ocorre na Proposta Curricular de São Paulo. Sigamos:

Divisibilidade por 11

Ex.: 3872

Forma aditiva: $(a + 10b)$

$$\begin{array}{r} 387(2) \\ +20 \\ \hline 40(7) \\ +70 \\ \hline 11(0) \\ +0 \\ \hline 11 \end{array}$$

Forma subtrativa: $(a - b)$

$$\begin{array}{r} 387(2) \\ -2 \\ \hline 38(5) \\ -3 \\ \hline 3(3) \\ -3 \\ \hline 0 \end{array}$$

3872 é divisível por 11.

Divisibilidade por 13

Ex.: 28574 Forma aditiva:

Forma aditiva: $(a + 4b)$

$$\begin{array}{r} 2857(4) \\ +16 \\ \hline 287(3) \\ +12 \\ \hline 29(9) \\ +36 \\ \hline 6(5) \\ +20 \\ \hline 26 \end{array}$$

26 (múltiplo de 13)

Forma subtrativa: $(a - 9b)$

$$\begin{array}{r} 2857(4) \\ -36 \\ \hline 282(1) \\ -9 \\ \hline 27(3) \\ -27 \\ \hline 0 \end{array}$$

28574 é divisível por 13.

Não pretendendo alongar-me em exemplos, darei mais dois critérios para 17 e para 19:

Para 17: forma $(a - 5b)$

$$\begin{array}{r} 1419(5) \\ -25 \\ \hline 139(4) \\ -20 \\ \hline 11(9) \\ -45 \\ \hline -3(4) \\ +20 \\ \hline 17 \end{array}$$

Para 19: forma $(a + 2b)$

$$\begin{array}{r} 42094(5) \\ +10 \\ \hline 4210(4) \\ +8 \\ \hline 421(8) \\ +16 \\ \hline 43(7) \\ +14 \\ \hline 5(7) \\ +14 \\ \hline 19 \end{array}$$

Por que funciona

Da maneira como a e b foram definidos, tem-se

$$n = 10a + b$$

O processo se resume em achar um número k tal que $n = 10a + b$ seja um múltiplo do número primo p se, e só se, $m = a + kb$ for múltiplo de p. Ora, da identidade

$$n = 10m + (1 - 10k)b,$$

deduz-se que: Se k for tal que $1 - 10k$ seja divisível pelo número primo p, então:

i) se p ($\neq 2$ e, $\neq 5$) dividir n, p dividirá m;

ii) reciprocamente, se p dividir m, p dividirá n.

Para concluir que um número primo p, $p \neq 2$ e $p \neq 5$ *é* um divisor de n se, e somente se, ele for um divisor de m, podemos escolher k de modo que p seja um divisor de $1 - 10k$ e é este o "segredo" da tabela.

Ilustrando:

$p = 7$: $1 - 10k$ é divisível por 7 para $k = 5$, $k = -2$ (e para muitos outros valores de k, porém todos de valor absoluto maior). Daí, a forma aditiva $a + 5b$ e a subtrativa, $a - 2b$, isto é, no exemplo apresentado: $n = 33684$ é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ m = 3388 é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ m' = 378 é divisível por 7 $\Leftrightarrow$ m'' = 11 é divisível por 7.

$$p = 11: \; 1 - 10k \text{ é divisível por 11 para}$$

$$k = 10,\ k = -1, \text{ etc. Daí a forma aditiva } a + 10b \text{ e a subtrativa, } a - b.$$

Para o leitor familiarizado com congruências, "achar k de modo que p seja um divisor de $1 - 10k$ equivale a resolver a equação $10^k \equiv 1 \pmod{p}$ que tem infinitas soluções para p e 10 primos entre si, sendo todos os valores de k côngruos entre si, módulo p.

Uma equação motivadora

Gilder da Silva Mesquita

Quando eu era aluno de um curso pré-vestibular, meu professor de Álgebra apresentou o problema: Resolver a equação irracional

$$\sqrt{\sqrt{x-2}+2} = x-4\ ,$$

usando apenas técnicas aprendidas no ensino fundamental, portanto, sem usar resultados sobre raízes de equações algébricas, vistos no ensino médio (2º grau). Aparentemente não parecia nada fora do comum, mas...

qual é a primeira ação natural? Elevar ambos os membros ao quadrado, não é?

$$\sqrt{x-2}+2 = (x-4)^2 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x-2} = x^2-8x+14.$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$x-2 = x^4-16x^3+92x^2-224x+196 \Rightarrow$$

$$x^4-16x^3+92x^2-224x+198 = 0.$$

"E agora, José?" Como resolver essa equação, usando apenas recursos do ensino fundamental? Acredite, é possível! E esse é um problema desafiador, do tipo que devemos oferecer aos nossos alunos, pois exige alguma criatividade e exercita várias operações algébricas. Vejamos:

Inicialmente observamos que, sendo a raiz quadrada um número não negativo, devemos ter $x \geq 4$

Fazendo a substituição

$$\sqrt{x-2} = y \quad (y \geq 0),$$

obtemos $x - 2 = y^2$ e a equação fica $\sqrt{y+2} = y^2 - 2$, logo, $y \geq \sqrt{2}$..

Como não adianta elevar ao quadrado novamente, vamos tentar uma fatoração e uma nova mudança de variável:

$$\sqrt{y+2} = y^2 - 2 = y^2 - 4 + 2 = (y+2)(y-2) + 2$$

Fazendo a substituição $z = \sqrt{y+2}$, temos

$$y + 2 = z^2 \text{ e } y - 2 = z^2 - 4 \text{ e, então,}$$

$$z = z^2(z^2 - 4) + 2 \text{ ou } z - 2 = z^2(z-2)(z+2)$$

e essa equação podemos resolver. Vejamos:

1º) se $z - 2 = 0$, temos a solução $z = 2$ [esta solução, em geral, nossos alunos perdem fazendo o cancelamento do termo $(z-2)$].

2º) se $z - 2 \neq 0$, temos $z^2(z+2) = 1$ ou $z^3 + 2z^2 - 1 = 0$.

De $z = \sqrt{y+2}$ e $y \geq \sqrt{2}$,

temos $z \geq \sqrt{\sqrt{2}+2} \geq 1$, mas então $z^3 + 2z^2 \geq 3$ portanto, não se po-de ter $z^3 + 2z^2 - 1 = 0$ logo, a única solução da equação em z é $z = 2$, que faz $y = 2$ e, então, $x = 6$.

Logo, $x = 6$ é a única solução real da equação proposta inicialmente.

E a equação é de fato motivadora!

Um leitor nos encaminhou uma outra solução da equação, usando simplesmente fatoração. Vamos lá.

Desdobrando-se alguns termos da expressão, teremos:

$$x^4 - 7x^3 - 9x^3 + 11x^2 + 63x^2 + 18x^2 - 99x - 126x + 198 = 0$$

Colocando-se em evidência x^2 no 1º, 2º e 4º termos, $-9x$ no 3º, 5º e 7º termos e 18 no 6º, 8º e 9º termos, teremos:

$$x^2(x^2 - 7x + 11) - 9x(x^2 - 7x + 11) + 18(x^2 - 7x + 11) = 0,$$

ou ainda $(x^2 - 9x + 18)(x^2 - 7x + 11) = 0$,

que é equivalente a $(x - 6)(x - 3)(x^2 - 7x + 11) = 0$.

As raízes dessa última equação são obtidas facilmente:

$$x = 6,\ x = 3,\ x = \frac{7 + \sqrt{5}}{2} \text{ e } x = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}.$$

Substituindo-se na equação dada, somente $x = 6$ é solução.

Frações: da forma fracionária à decimal A lógica do processo

Nilza Eigenheer Bertoni

Um assunto que nem sempre é bem compreendido por nossos alunos é a passagem da escrita de um número racional, como quociente entre números inteiros, na forma de uma fração, para sua forma decimal. Perguntas como: *onde colocar a vírgula?, quando se escreve* 0 *no quociente?, quando se passa para a casa seguinte sem colocar o* 0 *?* mostram que o estudante está tentando reproduzir uma técnica sem compreender o que está fazendo.

Neste artigo, fazemos e discutimos essa passagem, da notação de fração para a escrita decimal, usando também outras bases de numeração. Mais do que simples elucubração ou exercício de raciocínio, o que pretendemos é relacionar, comparar e fazer analogias com o objetivo de levar a uma compreensão mais sólida dos fatos matemáticos que justificam a técnica usada.

O conhecimento de como se pode fazer a divisão do numerador pelo denominador em outras bases de numeração pode esclarecer o verdadeiro significado desse procedimento tão corriqueiro e automatizado no sistema decimal.

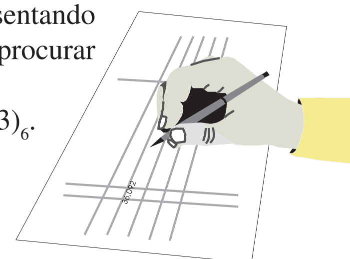
Pensar nessas coisas desenvolve um relacionamento diferente, mais íntimo e profundo com a Matemática. Forma também um conhecimento mais reflexivo e interiorizado, no qual podemos buscar respostas para nossos próprios questionamentos ou para as intempestivas e curiosas perguntas dos nossos alunos.

Os sistemas posicionais de numeração

O nosso sistema de numeração é posicional e de base 10, o *sistema decimal*. Conseguimos escrever qualquer número natural apenas com os símbolos usados para indicar os números naturais de 0 a 9, aqueles menores que 10, a base escolhida. Assim, se escrevemos uma seqüência desses símbolos ou algarismos, como $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$, sabemos, pelos princípios que regem esse sistema, que tal notação significa $a_n 10^{10} + a_{n-1} 10^{n+1} + ... + a_1 10^1 + a_0 10^0$.

Os princípios gerais desse sistema aplicam-se igualmente a outro sistema posicional, com uma outra base b escolhida. Nesse caso, símbolos serão atribuídos aos números $0, 1, ..., b-1$, menores que a base, e o significado de uma seqüência $a_n a_{n-1} a_{n-2} ... a_1 a_0$, desses símbolos nesse sistema será

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n+1} + ... + a_1 b^1 + a_0\ b^0.$$



Como exemplo, se temos 603 em nosso sistema decimal, representando $6 \cdot 100 + 3$, e queremos escrevê-lo no sistema de base 6, devemos procurar expressá-lo em grupos de potência de 6. Verifica-se que

$603 = 2 \cdot 6^3 + 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 6 + 3$, logo 603 se escreve como $(2443)_6$.

A notação posicional para as frações

Um tal sistema pode ser estendido, ou ampliado, de modo a poder representar também números não inteiros. A idéia-chave é a seguinte: observando que, na representação de um número inteiro na base 10, cada posição da esquerda para a direita corresponde a um grupo 10 vezes menor que o anterior, se continuamos uma casa à direita da casa das unidades, ela deve representar *uma quantidade* 10 *vezes menor que a unidade*, ou seja, deve representar o que chamamos de *décimo*.

Vale observar que essa idéia simples e brilhante passou por percalços históricos, antes de ser definitivamente adotada. Os babilônios já a conheciam, por volta de 2000 a.C. Eles usavam um sistema posicional sexagesimal (base 60) e estenderam sua escrita para as casas fracionárias, significando $1/60$, $1/60^2$ etc.

Entretanto, não tinham um símbolo para o zero nem um símbolo que fizesse a separação entre casas inteiras e fracionárias. Num mundo com pouquíssima comunicação, essa notação não se generalizou. Os hindus tinham o sistema decimal com o zero, mas paravam nas unidades, não usando casas fracionárias. Para as frações usavam notação com dois símbolos, semelhantes a numerador e denominador.

Analogamente ao que aconteceu com o zero, que só foi usado muito tempo depois dos outros naturais, também a notação para as frações num sistema posicional só foi retomada ou reinventada –, agora com separação entre a parte inteira e a parte fracionária –, muito mais tarde, no século XVI, por vários matemáticos.[*]

Da notação fracionária para a posicional

Se temos um número racional escrito em duas notações - a fracionária (com numerador e denominador) e a posicional (com casas após a vírgula) –, como obter uma da outra? Neste texto, vamos explicitar a lógica do que se chama *passar para a forma decimal*, isto é, a passagem da notação fracionária para a forma posicional, com vírgula e casas após a vírgula – no Brasil e em muitos outros países, usa-se a vírgula para indicar a separação entre a parte inteira e a fracionária; em países de língua inglesa, usa-se o ponto, como nas calculadoras (ver **RPM** 21, p. 25).

Sabemos como fazer isso em nosso sistema de base 10. Tudo o que temos a fazer é dividir o numerador pelo denominador, sem parar no resto inteiro. Por exemplo, em 3/4, dividindo-se 3 por 4, obtém-se 0,75. Mas qual a lógica desse processo? Por que ele funciona? Para responder a essas perguntas é conveniente pensarmos antes na fração como resultado de uma divisão.

Comparação entre dois usos do número racional

Os livros didáticos comumente apresentam a utilização do número racional escrito na forma de fração no caso em que uma unidade é dividida em partes iguais (cujo número é indicado pelo denominador), das quais se toma um certo número (o numerador). Logo após, usam a fração como resultado da divisão do *numerador* pelo *denominador*, muitas vezes sem mostrar a equivalência das duas situações.

Vale a pena mostrar essa equivalência. Por exemplo, se consideramos o número racional 3/4. Tanto ele se aplica ao caso em que se têm 3 partes de 1 bolo que foi dividido em 4 partes iguais, como ao caso em que se pretenda dividir 3 bolos igualmente por 4 crianças. Com efeito, nessa segunda situação, um bom método é dividirmos 1 bolo de cada vez em 4 partes iguais e

(*) *Adam Riese* publica em 1522, na Alemanha, uma tabela de raízes quadradas na qual aparece a parte fracionária de cada raiz (uma aproximação, no caso das raízes não inteiras) expressa em notação decimal. É provável que o uso de um ponto para separar a parte inteira da decimal tenha ocorrido pela primeira vez na *Aritmética de Pellos*, de 1492. Em 1530 *Rudolf* usa, na Alemanha, um traço vertical para separar a parte inteira da parte decimal. Em 1585, *Stevin*, flamengo, apresenta um tratado sistemático sobre as frações decimais, em notação, contudo, pouco prática. *Napier*, num trabalho de 1617, usa o ponto amplamente, estendendo seu uso às operações.

darmos 1 parte a cada criança. Ao final, cada uma terá recebido 1 quarto de cada bolo, portanto 3 quartos no total.

A lógica da divisão "continuada"

Consideremos a divisão:

$$\begin{array}{r|l} 3 & \quad 4 \\ \cline{2-2} 30 & 0,75 \\ 20 & \\ 0 & \end{array}$$

Analisando o processo, vemos que, ao dividir 3 por 4, não obtemos nenhuma unidade, mas podemos pensar nesse 3 como 30 décimos que, divididos por 4, dão 7 décimos e ainda sobram 2 décimos. Esses, por sua vez, podem ser pensados como 20 centésimos que, divididos por 4, dão 5 centésimos, sem deixar resto. Ou seja, nesse sistema, se uma divisão não tem quociente expresso por um número natural com resto nulo e queremos continuá-la após a vírgula, o que estamos buscando é a quantidade de décimos, centésimos, etc. que ainda podemos obter no resultado.

Na comparação entre o sistema decimal e um outro sistema posicional, surge a indagação: como é o processo de divisão para escrevermos uma fração, digamos, 3/4 , no sistema de base 6, por exemplo?

Passagem da notação fracionária para a notação posicional de base 6

Na base 6 precisamos só dos algarismos de 0 a 5. Como vai funcionar aqui o método da divisão continuada? A fração 3/4 continua sendo o resultado da divisão de 3 por 4 mesmo nesse novo sistema. Se efetuamos a divisão nesse sistema, devemos obter o desenvolvimento procurado. Mas o que significa dividir nesse sistema?

Analogamente ao caso da divisão no sistema decimal, também no caso da base 6 poderemos continuar uma divisão após a vírgula, buscando a quantidade de sextos, de trinta e seis avos (6^2 avos), etc. Ou seja:

$$\begin{array}{l|r} 3 & 4 \\ \cline{2-2} \text{resto } 3 = 3 \times 6 = 18 \text{ sextos} & (0,43)_6 \\ \text{resto } 2 = 2 \times 6 = 12 \text{ trinta e seis avos} & \end{array}$$

Isto é, na base 6, a fração 3/4 se escreve como 0,43, ou seja: 4 sextos e 3 trinta e seis avos. E, de fato, $4/6 + 3/36 = (24 + 3)/36 = 27/36 = 3/4$.

No caso da fração imprópria, o processo é análogo, sendo que a parte inteira não é 0 e também vai escrita na base 6. Em qualquer outra base, o processo é o mesmo, mas o resultado pode surpreender. Essa mesma fração, por exemplo, na base 7 teria um desenvolvimento infinito periódico: 3/4 = (0,515151...).

Isso nos leva a procurar novas comparações entre sistemas de bases diferentes. Na base 10, desenvolvimento decimal infinito periódico só ocorre para frações que apresentam, em sua forma reduzida, algum fator diferente de 2 ou 5 no denominador. Numa outra base, também ocorre o mesmo: a presença, no denominador de uma fração em sua forma reduzida, de um fator primo que não seja divisor da base implica que essa fração terá um desenvolvimento infinito periódico. Verificar isso para algumas frações e algumas bases poderá ser uma tarefa interessante.

Algumas técnicas operatórias
(de outros tempos e de outros lugares)

Ronaldo Nicolai

Aprendemos na infância – e usamos inúmeras vezes – algoritmos para efetuar 4 operações elementares: adição, subtração, multiplicação e divisão.

Esses algoritmos estão intrinsecamente ligados ao nosso sistema de numeração mas podemos nos perguntar: será que são os únicos existentes? Foram sempre usados? São universalmente reconhecidos como os melhores?

Neste artigo descrevemos algumas técnicas operatórias, de aparências talvez exótica, usadas em outros tempos e outros lugares. Apresentaremos também pequenas variações dos algoritmos habituais que ajudam a compreender porque estes algoritmos fornecem as respostas desejadas.

Adição

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 1\,1 \\ 5\,8\,4 \\ +\quad 9\,7 \\ \hline 6\,8\,1 \end{array}$$

ou

$$\begin{aligned} 584 + 97 &= (500 + 80 + 4) + (90 + 7) = \\ &= 500 + (80 + 90) + (4 + 7) = \\ &= 500 + 170 + 11 = 500 + (100 + 70) + (10 + 1) = \\ &= (500 + 100) + (70 + 10) + 1 = \\ &= 600 + 80 + 1 = 681 \end{aligned}$$

O algoritmo da adição realiza, simultaneamente, a maior parte das operações acima detalhadas.

Multiplicação

a) Usando uma decomposição como a anterior e aplicando a propriedade distributiva, temos

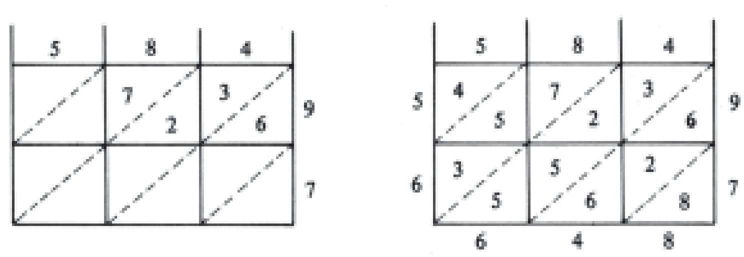
$$584 \times 97 = (500 + 80 + 4) \times (90 + 7) =$$
$$= 4500 + 7200 + 360 + 3500 + 560 + 28$$

ou, de modo um pouco mais prático

$$\begin{array}{r} 584 \\ \underline{\times 97} \\ 28 \\ 560 \\ 3500 \\ 360 \\ 7200 \\ \underline{45000} \\ 56648 \end{array}$$

b) Multiplicação em gelosia

Os dois quadros abaixo ilustram o algoritmo em gelosia para efetuar 584 × 97. Não se sabe quando ou onde a multiplicação em gelosia apareceu, mas a Índia parece ser a fonte mais provável. Lá foi usada pelo menos desde o século doze e depois parece ter sido levada à China e à Arábia.



c) Técnica camponesa ou russa

Foi uma técnica comum na Europa medieval. Chamou-se multiplicação russa pois era supostamente usada pelos camponeses russos até a 1ª Guerra Mundial. A multiplicação de 584 por 97 ilustrará o processo:

97	584*	584
48	1168	
24	2336	
12	4672	
6	9344	
3	18688*	18688
1	37376	37376
		56648

O processo consiste em dividir por 2 um dos fatores (com aproximação para menos, se for ímpar) e, simultaneamente, dobrar o outro fator. Somam-se os resultados das linhas dobradas onde a correspondente metade for ímpar. Tente descobrir por que funciona.

Subtração

Várias técnicas podem ser usadas para efetuar uma subtração:

a) Adicionar o mesmo aos dois termos da subtração:

$$\begin{array}{r} 584 \\ -\ 97 \\ \hline \end{array} \quad \text{e o mesmo que, somando 3, efetuar} \quad \begin{array}{r} 587 \\ -100 \\ \hline 487 \end{array}$$

Outro exemplo?

$$304 - 76 \underset{+4}{=} 380 - 80 \underset{+20}{=} 328 - 100 = 228$$

b) Podemos também subtrair o mesmo número dos dois termos

$$584 - 97 \underset{+4}{=} 580 - 93 \underset{-80}{=} 500 - 13 \underset{-10}{=} 490 - 3 = 487$$

c) Quanto devemos acrescentar ao 97 para obter 584?

$$\begin{array}{rcrl}
97 & + & 3 & = 100 \\
100 & + & 400 & = 500 \\
500 & + & 84 & = 584 \\
\cline{3-3}
 & & 487 &
\end{array}$$

d) Quanto devemos tirar de 584 para obter 97?

$$\begin{array}{rcrl}
584 & - & 4 & = 580 \\
580 & - & 80 & = 500 \\
500 & - & 400 & = 100 \\
\cline{3-3}
100 & - & 3 & = 97 \\
 & & 487 &
\end{array}$$

Divisão

Sabemos que, dados dois números inteiros positivos a e b, existe um único par de números inteiros q e r, chamados quociente e resto, tais que $a = bq + r$ e $0 \leq r < b$. O algoritmo da divisão nos fornece o quociente q e o resto r.

Em alguns países, como a Inglaterra e os Estados Unidos, o algoritmo inicial para achar q e r é diferente do nosso. (Também a maneira de dispor a, b, q e r difere um pouco da nossa.)

Vamos exemplificar:

$$\begin{array}{r|l}
317 & 8 \\
\cline{2-2}
-80 & 10 \\
\cline{1-1}
237 & 20 \\
-160 & \\
\cline{1-1}
77 & 5 \\
-40 & \\
\cline{1-1}
37 & 4 \\
\cline{2-2}
-32 & \boxed{39} \\
\cline{1-1}
5 &
\end{array}$$

ou, começar por exemplo, com 30 no quociente:

$$\begin{array}{r|l}
317 & 8 \\
\cline{2-2}
-240 & 30 \\
\cline{1-1}
77 & 9 \\
-72 & \boxed{39} \\
\cline{1-1}
5 &
\end{array}$$

Qualquer número poderia ser colocado no lugar reservado ao quociente desde que o produto deste número pelo divisor seja menor do que ou igual ao respectivo dividendo. Na prática, o que fazemos é tomar o maior número possível nessas condições, a fim de abreviar o processo. O quociente da divisão é a soma do quocientes parciais. Mais um exemplo:

$$\begin{array}{l|l} 509 & \underline{37} \\ \underline{-\,370} & 10 \\ 139 & 2 \\ \underline{-\,74} & \\ 65 & \underline{1} \\ \underline{-\,37} & 13 \\ 28 & \end{array}$$

ou, como os americanos e ingleses escrevem:

$$\begin{array}{rl} & \underline{10 + 2 + 1} = 13 \\ 37) & 509 \\ & \underline{370} \\ & 139 \\ & \underline{74} \\ & 65 \\ & \underline{37} \\ & 28 \end{array}$$

Cada criança, a seu tempo, vai encurtando o processo, chegando eventualmente ao algoritmo usual:

$$\begin{array}{l|l} 317 & \underline{8} \\ \underline{-\,24} & 39 \\ 77 & \\ \underline{-\,72} & \\ 5 & \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{l|l} 317 & \underline{8} \\ 77 & 39 \\ 5 & \end{array}$$

Convém observar que o último algoritmo, predominante em nossas escolas, é o que exige um cálculo mental maior.