

IME-USP - Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

São Paulo, quinta-feira, 08 de novembro de 2001.

Disciplina: MAT450 - Seminários de Resolução de Problemas.

Professor: Antônio Luiz Pereira (Matemática - USP).

Curso: 45023 - Matemática/Licenciatura.

Alunos: AGNELO PIRES RAMOS.

ANTONIO ANGELO MATEUS.

JOÃO BATISTA DE OLIVEIRA MATIAS.

THIAGO RODRIGO ALVES CARNEIRO.

Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.

Índice

Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.	1
Índice	1
A idéia de problema matemático	3
A importância dos problemas para a Matemática nos contextos de ciência e disciplina escolar	3
Enfim, o que é um problema?.....	3
Caracterizando um problema	4
Problemas e exercícios: diferenças.....	4
O que é um bom problema?.....	5
Bons problemas para o desenvolvimento da matemática.....	5
Bons problemas para o ensino de matemática	5
As heurísticas de resolução de problemas	8
Sobre o termo heurística	8
Um pouco de história: os primeiros passos para uma heurística de resolução de problemas	8
Filósofos gregos.....	8
As primeiras idéias com Descartes	9
Graham Wallas e a escola Gestaltista de psicologia	9
Skinner e a escola behaviorista.....	10

A heurística de resolução de problemas de George Polya	10
Biografia de Polya.....	10
Etapas de resolução de problemas, segundo Polya.....	11
A importância de revisar a solução	12
Os princípios heurísticos de Alan Schoenfeld	13
Níveis de capacidade de resolução de problemas.....	14
Introdução.....	14
Níveis no desenvolvimento do resolvedor de problemas	14
Exemplificando as idéias de Polya e Schoenfeld.....	15
Introdução.....	15
Exemplo da utilização da concepção de Alan Schoenfeld	15
Exemplo da aplicação da estratégia de George Polya.....	15
Conclusões.....	19
Bibliografia	20
Artigos	20
Livros.....	20
Sites na Internet	20
Sobre a capa	21

A idéia de problema matemático

“O que para alguns é um problema para outros é um exercício e para alguns outros uma distração”. (Ditado popular)

A importância dos problemas para a Matemática nos contextos de ciência e disciplina escolar

Um matemático, ao descrever o seu trabalho, certamente não deixará de pronunciar duas palavras presentes no seu dia a dia: *problema* e *prova*.

O *problema* é o meio pelo qual a Matemática se desenvolve, ou seja, o “alimento” da evolução matemática. Um problema tem seu grau de importância relacionado à quantidade de idéias novas que ele traz à matemática e o quão ele é capaz de impulsionar os diversos ramos da Matemática - sobretudo aqueles em que ele não está diretamente relacionado.

A *prova* está indissoluvelmente ligada ao problema e é a única maneira de atestar ou não a solução matemática do mesmo. A prova representa o rigor, a solidez e a consistência da teoria matemática e nada mais é do que uma seqüência de raciocínios dedutivos que parte de fatos de veracidade já conhecida - como teoremas e axiomas - e chega até o resultado em demonstração, resolvendo o problema.

No contexto de educação matemática, um problema, ainda que simples, pode suscitar o gosto pelo trabalho mental se desafiar à curiosidade e proporcionar ao aluno o gosto pela descoberta da resolução. Neste sentido, os problemas podem estimular a curiosidade do aluno e fazê-lo a se interessar pela Matemática, de modo que ao tentar resolvê-los o aluno adquire criatividade e aprimora o raciocínio, além de utilizar e ampliar o seu conhecimento matemático.

Enfim, o que é um problema?

Agora que falamos da importância dos problemas à Matemática, podemos dar uma definição intuitiva de problema: “um problema matemático é toda situação requerendo a descoberta de informações matemáticas desconhecidas para a pessoa que tenta resolvê-lo e/ou a invenção de uma demonstração de um resultado matemático dado”¹. Ainda, segundo Newell & Simon (1972), “um problema é uma situação na qual um indivíduo deseja fazer algo, porém desconhece o caminho das ações necessárias para concretizar a sua ação”² ou segundo Chi e Glaser (1983) “o problema é uma situação na qual

¹ SILVEIRA, J. F. P. *O que é um problema matemático?* Site: <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/resu1.html>

² POGGIOLI, L. *Estrategias de resolución de problemas*. Serie Enseñando a aprender. Caracas, Polar, 2001.

um indivíduo atua com o propósito de alcançar uma meta utilizando para tal alguma estratégia em particular”³.

A partir das concepções de problemas acima, entendemos que existe um problema quando há um objetivo a ser alcançado e não sabemos como atingir esse objetivo. Em matemáticos, existe um problema quando há um resultado - conhecido ou não - a ser demonstrado utilizando a teoria matemática.

Um problema é mais valioso à medida que o resolvidor - ou seja, quem está se propondo a encontrar uma solução ao problema - tenha de *inventar estratégias e criar idéias*. Quem resolve pode até saber o objetivo a ser atingido, mas ainda estará enfrentando um problema se ele ainda não dispõe dos meios para atingir tal objetivo.

Caracterizando um problema

Resnick⁴ apontou várias características dos problemas as quais procuramos resumir abaixo:

1. Sem algoritmização: o caminho da resolução é desconhecido, ao menos em boa parte.
2. Complexos: precisam de vários pontos de vista.
3. Exigentes: a solução só é atingida após intenso trabalho mental; embora o caminho possa ser curto, ele tende a ser difícil.
4. Necessitam de lucidez e paciência: um problema começa com uma aparente desordem de idéias e é preciso adotar padrões que permitirão construir o caminho até a solução.
5. Nebulosos: nem sempre todas as informações necessárias estão aparentes; por outro lado, pode existir conflito entre as condições estabelecidas pelo problema.
6. Não há resposta única: normalmente ocorre de existirem várias maneiras de se resolver um dado problema; no entanto, pode acontecer de não existir uma melhor solução ou até de não haver solução - ou seja, resolver um problema não é o mesmo que achar a resposta.

Problemas e exercícios: diferenças

Por muitas vezes o professor de Matemática da Educação Básica costuma pedir para o aluno resolver exercícios ou problemas - até os livros didáticos induzem a utilizar esta palavra - para aprender um determinado tópico da matéria. Ou seja, é preciso diferenciar problema de exercício, palavras estas muitas vezes utilizadas como equivalentes pelos professores de Matemática.

O *exercício* é uma atividade de adestramento no uso de alguma habilidade ou conhecimento matemático já conhecido pelo resolvidor, como a aplicação de algum algoritmo ou fórmula já conhecida. Ou seja, o *exercício* envolve mera aplicação de resultados teóricos enquanto o *problema* necessariamente envolve invenção e/ou criação significativa.

³ POGGIOLI, L. *Estrategias de resolución de problemas*. Serie Enseñando a aprender. Caracas, Polar, 2001.

⁴ RESNIK, L. & COLLINS, Allan. Cognición y Aprendizaje. En *Anuario Psicología*. Nº 69, pp 189-197. Barcelona, Grafiques 92, S.A, 1996.

Por exemplo, considere como resolvidor um aluno no final do Ensino Fundamental (é importante dizer o perfil do resolvidor, pois o que pode ser um problema para uma pessoa pode não ser para outra que tenha mais conhecimento ou que já tenha visto o problema antes):

- Exercício: resolver a equação $x^2 - 3x + 1 = 0$ (supõe-se que tal aluno conheça a fórmula de Bhaskara).
- Problema: provar a fórmula de Bhaskara (supõe-se que tal aluno nunca tenha visto tal demonstração, mas conheça a fórmula); aqui percebemos a importância de definir o perfil do aluno, pois para o professor este não seria um problema uma vez que provavelmente ele já viu esta demonstração.
- Problema (mais difícil): descobrir, provando, uma fórmula para resolver toda e qualquer equação algébrica do segundo grau (supõe-se que tal aluno não conheça a fórmula de Bhaskara).

O que é um bom problema?

Como podemos imaginar, problemas existem muitos. E, certamente, dependendo do nosso propósito, alguns problemas são melhores do que outros.

Bons problemas para o desenvolvimento da matemática

Caso o nosso interesse seja avaliar o quão bom e útil é um problema matemático à medida que ele aprimora a ciência matemática, então é importante medir não só o poder desafiador do problema para os matemáticos, mas também o quanto ele 'mexe' com a Matemática. Quando dizemos que um problema "mexe" com a matemática, queremos dizer o quanto um problema pode fazer com que entendamos melhor a matemática, o quanto ele contribui para o desenvolvimento dos vários ramos da matemática, os benefícios que ele traz para o resolvidor de problemas no sentido de amadurecer o resolvidor para a habilidade de resolver problemas e ainda a possibilidade de surgimento de novos problemas.

Um ótimo problema matemático é, sem dúvida alguma, o problema de Fermat:

Sendo $n = 3, 4, 5, \dots$, mostrar que não há nenhuma trinca de inteiros positivos x, y, z verificando a equação

$$x^n + y^n = z^n$$

O enunciado deste problema é, de fato, bastante simples. No entanto, sua demonstração precisou de quase 400 anos e foi obtida pelo matemático A. Wilkes em 1995. A grandeza do Problema de Fermat não está na dificuldade ou utilidade deste resultado (que é praticamente inexistente) e sim no fato de que as tentativas de resolvê-lo produziram idéias e problemas que fertilizaram inúmeros campos da Matemática tais como a Teoria dos Números e a Geometria Algébrica.

Bons problemas para o ensino de matemática

O nosso interesse pode ser o de "eleger" bons problemas tendo como objetivo o processo ensino-aprendizagem de Matemática. Neste sentido, é importante que o problema:

- tenha enunciado acessível e de fácil compreensão;
- exercite o pensar matemático do aluno;

- ❑ exija criatividade na resolução;
- ❑ possa servir de 'trampolim' para a introdução ou consolidação de importantes idéias e/ou conceitos matemáticos; e, sobretudo,
- ❑ não seja muito fácil ou muito difícil e sim natural e interessante.

O professor pode passar ao aluno a idéia de que resolver um problema pode ser comparado a vencer um jogo. Para ambos é necessário entender o objetivo, conhecer as regras e saber selecionar as estratégias que devem ser tomadas.

É importante diferenciar esta noção de bom problema para o ensino de matemática com os desafios ao final dos capítulos de alguns livros didáticos ou dos rodapés de palavras cruzadas, revistas e almanaques, pois estes desafios ou charadas ou ainda "quebra-cabeças" tem por objetivo oferecer entretenimento e normalmente não exigem raciocínio dedutivo e levam à obsessão por respostas corretas.

O ensino de Matemática torna-se muito mais interessante à medida que se utiliza de bons problemas ao invés de se basear apenas em exercícios que remetem a reprodução de fórmulas e se distanciam da realidade do aluno.

Os problemas matemáticos para o ensino de matemática podem ser divididos em quatro tipos:

- ❑ *Problemas de sondagem*: para a introdução natural e intuitiva de um novo conceito;
- ❑ *Problemas de aprendizagem*: para reforçar e familiarizar o aluno com um novo conceito;
- ❑ *Problemas de análise*: para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos já aprendidos e mais fáceis que os problemas de sondagem; e
- ❑ *Problemas de revisão e aprofundamento*: para revisar os tópicos já vistos e aprofundar alguns conceitos.

Exemplo 1. Problema de sondagem.

Construa um triângulo cujos lados meçam 3cm, 4cm e 5cm.

(a) Existe algum triângulo diferente do que você construiu cujos lados também meçam 3cm, 4cm e 5cm? Por quê?

(b) Qual a medida do maior ângulo do triângulo que você construiu?

(c) Construindo três quadrados (um sobre cada lado do triângulo que você traçou), que relação você pode estabelecer entre a área do maior e as áreas dos dois menores?

(d) O menor ângulo do triângulo construído se opõe a qual dos lados? E o maior?

Comentários acerca do exemplo 1. Observe que o aluno basicamente só precisa saber o que é um triângulo para começar a pensar neste problema. Resolvido o problema, sem o auxílio do professor, o aluno ganha um acréscimo de conhecimento matemático (por exemplo, propriedades para triângulos retângulos como o Teorema de Pitágoras e propriedades para triângulos quaisquer como o fato do menor ângulo se opor ao menor lado e o maior ângulo se opor ao maior lado).

Exemplo 2. Problema de aprendizagem.

O mapa do tesouro: "Andem 20 passos a leste, a partir do velho carvalho, depois 15 passos a norte e 18 passos a oeste. Caminhem 9 passos a norte e outros 5 passos a leste e aí encontrarão meu tesouro".

Nas condições do mapa, quantos passos em linha reta devemos andar, partindo do velho carvalho para chegarmos ao tesouro?

Comentários do problema 2. Este problema faz com que o aluno utilize conceitos de geometria de forma intuitiva relacionando com o seu dia a dia; note que não há a reprodução de fórmulas matemáticas, pois o problema exige a intuição e a criatividade do aluno e, a priori, não é dada sugestão de caminho de resolução.

Exemplo 3. Problema de análise.

Existe um triângulo retângulo cujos lados sejam três números inteiros e consecutivos? Em caso afirmativo, determine a medida dos lados deste triângulo.

Comentários do problema 3. Este é um problema de investigação, que remete o aluno a curiosidade e a descoberta. Para tal, o aluno precisa criar uma estratégia utilizando alguns conceitos já aprendidos e acaba por fixar estes conceitos e aprofundar o seu conhecimento.

Exemplo 4. Problemas de revisão e aprofundamento.

Ache a área de um triângulo isósceles em função da medida de um dos seus lados congruentes e da altura do triângulo.

Comentários do problema 4. Ao mesmo tempo em que o problema leva a revisão dos conhecimentos relacionados a relações métricas em triângulos, ele possibilita a descoberta de um resultado novo.

As heurísticas de resolução de problemas

Sobre o termo heurística

Antes de entrarmos na exposição e análise das diversas heurísticas de resolução de problemas é muito importante termos uma idéia clara sobre o significado da palavra *heurística*. Para tal, recorremos ao dicionário Houaiss⁵ que nos ‘traduz’ heurística em vários contextos:

- ❑ *Contexto científico*: “a ciência que tem por objetivo a descoberta dos fatos”;
- ❑ *Contexto de problematização*: “a arte de inventar, de fazer descobertas” ou “método de investigação baseado na aproximação progressiva de um dado problema”; e
- ❑ *Contexto pedagógico*: “método educacional que consiste em fazer descobrir pelo aluno o que se lhe quer ensinar”.

Percebemos, portanto, que falar em heurística de resolução de problemas é falar sobre “métodos e regras que conduzem à descoberta, inovação, investigação e resolução de problemas”⁶. Podemos também observar que heurística pode referir-se tanto ao contexto científico quanto ao contexto educacional; para nós, ambos os contextos são pertinentes, pois ao mesmo tempo em que queremos avaliar a importância da resolução dos problemas na evolução da matemática - descoberta de novos resultados, criação de novos problemas, ..., etc. - também queremos ressaltar a importância dos problemas no processo ensino-aprendizagem.

Um pouco de história: os primeiros passos para uma heurística de resolução de problemas

Vários pensadores e pesquisadores estudaram ou têm estudado e pesquisado a respeito da atividade de resolver problemas.

Filósofos gregos

Inicialmente, a atividade de resolver problemas recai na questão filosófica de “pensar sobre o pensamento”; neste sentido, os filósofos gregos como Sócrates e Platão trazem algumas contribuições. Para Sócrates, o indivíduo já detém o conhecimento a ser usado para resolver o problema e, portanto, a atividade de resolver problemas não passa de mera ‘recordação’; para exemplificar seu método, certa vez Sócrates fez um escravo demonstrar o Teorema de Pitágoras ‘apenas’ lhe fazendo algumas perguntas.

Podemos notar, portanto, que o fato de Sócrates fazer perguntas já era um encaminhamento na solução do problema, o que ao nosso ver já tira em grande parte o mérito do escravo na resolução pois ele contou com a ajuda das perguntas elaboradas por Sócrates.

⁵ HOUAISS, Antonio et al. *Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa*. Rio de Janeiro, Objetiva, 2001, 1ª ed., p. 1524.

⁶ FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. *Novo Aurélio - O dicionário da língua portuguesa*. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 2000, 3ª edição.

As primeiras idéias com Descartes

As primeiras idéias um pouco mais positivas e razoáveis no sentido da heurística de resolução de problemas vem com filósofo e matemático francês Descartes (1596 - 1650).

Para o nosso propósito, o importante em Descartes são suas idéias sobre 'pensamento produtivo' que tinham um papel importante no seu ambicioso projeto de construção de um método geral de resolução de problemas. Descartes chegou a escrever dois volumes (o segundo incompleto) - dentre três planejados - do **Rules for the Direction of the Mind**, onde procurava expor em detalhes como, segundo seu método, seria possível resolver qualquer problema. Em resumo, Descartes vê o processo de resolução de problemas em três fases:

- ❑ Reduzir todo problema algébrico a um problema contendo apenas equação(ões);
- ❑ Reduzir todo problema matemático a um problema algébrico; e
- ❑ Reduzir qualquer problema a um problema matemático.

Podemos notar que Descartes objetiva reduzir todo problema que existe no mundo a um problema matemático; mais que isso, a idéia de Descartes era completar o projeto de resolver problemas citado acima e ainda usufruir de seus benefícios. Fica evidente, ao menos em nossa concepção, o caráter irrealista do projeto de Descartes, a começar pela idéia de reduzir todo problema a um problema matemático (o que, convenhamos, nem sempre é possível).

No entanto, Descartes apresenta algumas idéias de valor e relevância relacionadas ao ensino e que podem ser aplicadas a resolução de problemas como, por exemplo:

- ❑ Regra IV: "É necessário método para descobrir as leis da natureza", ressaltando a importância da sistematização.
- ❑ Regra III: "as únicas coisas que devemos aceitar são aquelas que ou podemos ver com clareza ou podemos deduzir com certeza", relevando a importância da argumentação ao invés do uso da autoridade.
- ❑ Regra VII: "Se chegarmos a um ponto onde não conseguimos entender o que está acontecendo, devemos fazer uma pausa e não prosseguir em um trabalho inútil", mostrando que é importante manter o controle sobre o que estamos fazendo sob pena de se perder em um trabalho infrutífero.



Graham Wallas (1858 - 1932) psicólogo e cientista político inglês.

É importante citar Descartes em detalhes, pois algumas de suas sugestões para o ensino e a resolução de problemas antecipam idéias de George Polya.

Graham Wallas e a escola Gestaltista de psicologia

Após Descartes, encontramos idéias originais acerca de resolução de problemas na escola Gestaltista de psicologia com o psicólogo e cientista político inglês Graham Wallas (1858 - 1932)⁷.

⁷ Fonte: site <http://www.lse.ac.uk/lsehistory/wallas.htm>

Para Wallas as quatro fases de resolução de problemas são:

1. **Saturação**: você trabalha no problema até ter feito tudo o que podia com ele.
2. **Incubação**: você tira o problema do seu consciente e deixa o subconsciente tomar conta dele. Ou seja, você 'dorme' sobre ele. Esta é à parte fácil.
3. **Inspiração**: a resposta chega subitamente, sem que você esteja pensando no problema.
4. **Verificação**: você checa a solução apenas para ter certeza de sua correção.

A visão Gestaltista de Wallas fornece uma visão interessante da solução de um problema e representa um passo importante como contraposição às idéias de Descartes. No entanto, por apelar a noções vaga ligada ao funcionamento da 'mente', ela acaba não tendo grande valia como uma estratégia de resolução de problemas.

Skinner e a escola behaviorista

Uma mudança radical de posição em relação às idéias de Descartes ou de Wallas é encontrada na escola behaviorista com o psicólogo americano B. F. Skinner (1904 - 1990)⁸. Ele propõe, de fato, a completa exclusão do conceito de mente da teoria do conhecimento.

De acordo com Skinner as noções de mente e mentalismo são, na melhor das hipóteses, construções inúteis. A proposta de Skinner consiste então em:

1. Determinar as ações produtivas.
2. Reforçá-las.

Apesar da relevância das idéias de Skinner para, digamos, treinamentos de ratos e pombos, elas se revelaram, no mínimo, insuficientes para o ensino em níveis mais elevados.



B. F. Skinner (1904 - 1990), psicólogo americano.



George Polya (1897 - 1985), filósofo e matemático húngaro.

A heurística de resolução de problemas de George Polya

"Resolver problemas é uma habilidade prática, como nadar, esquiar ou tocar piano: você pode aprendê-la por meio de imitação e prática. (...) se você quer aprender a nadar você tem de ir à água e se você quer se tornar um bom 'resolvedor de problemas', tem que resolver problemas".⁹

Biografia de Polya

George Polya (1897 - 1985) foi um dos matemáticos mais importantes do século XX. Nascido na Hungria, ele passou a maior parte

⁸ Fonte: site <http://www.pbs.org/wgbh/aso/databank/entries/bhskin.html>

⁹ POLYA, George. *Mathematical Discovery: on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving*. 2 vols. John Wiley, 1962-65, p. ix.

do seu tempo pesquisando na universidade de Stanford nos Estados Unidos devido à situação política da Europa na época da Segunda Guerra Mundial. Pesquisou em vários ramos da matemática, como probabilidade e equações diferenciais parciais; sua maior contribuição, no entanto, está relacionada à heurística de resolução de problemas matemáticos com várias publicações relacionadas ao assunto, em especial ***How To Solve It*** - que vendeu mais de um milhão de cópias - em 1957. Polya é um dos matemáticos do nosso século que considera a Matemática uma "ciência observacional" na qual a observação e a analogia desempenham um papel fundamental; afirma também a semelhança do processo criativo na Matemática e nas ciências naturais.

Polya foi o primeiro matemático a apresentar uma heurística de resolução de problemas específica para a matemática. Por isso, Polya representa uma referência no assunto, uma vez que suas idéias representam uma grande inovação em relação às idéias de resolução de problemas existentes até então (vide Descartes, Wallas, Skinner). Muitas de suas idéias são razoáveis até os dias atuais, servindo de alicerce para trabalhos de outros pesquisadores contemporâneos a Polya na área nesta área como Schoenfeld e Thompson.

Etapas de resolução de problemas, segundo Polya

Procurando organizar um pouco o processo de resolução de problemas, Polya o dividiu em quatro etapas. É importante ressaltar que Polya nunca pretendeu que a sua divisão correspondesse a uma seqüência de etapas a serem percorridas uma depois da outra sem que nunca seja conveniente ou necessário voltar atrás ou que a sua divisão funcionasse como uma 'poção mágica' para resolver problemas matemáticos.

As *quatro etapas de resolução de problemas segundo Polya* são:

1ª etapa: compreensão do problema

O primeiro passo é *entender* o problema.

É importante fazer perguntas. Qual é a incógnita? Quais são os dados? Quais são as condições? É possível satisfazer as condições? Elas são suficientes ou não para determinar a incógnita? Existem condições redundantes ou contraditórias?

Construir figuras para esquematizar a situação proposta no exercício pode ser muito útil, sobretudo introduzindo-se notação adequada.

Sempre que possível, procurar separar as condições em partes.

2ª etapa: construção de uma estratégia de resolução

Encontrar conexões entre os dados e a incógnita.

Talvez seja conveniente considerar problemas auxiliares ou particulares caso uma conexão não seja encontrada em tempo razoável.

É importante fazer perguntas. Você já encontrou este problema ou um parecido? Você conhece um *problema semelhante*? Você conhece teoremas ou fórmulas que possam ajudar?

Olhe para a incógnita e tente achar um problema familiar e que tenha uma incógnita semelhante.

Caso você encontre um problema relacionado ao seu e que você sabe resolver, tente aproveitá-lo. Você pode usar seu resultado ou método? É necessário introduzir algum elemento auxiliar de modo a viabilizar esses objetivos?

Você consegue enunciar o problema de uma outra maneira?

Caso você não consiga resolver o problema dado, tente resolver um problema parecido! Você consegue imaginar um caso particular mais acessível? E um caso mais geral e/ou mais acessível? Você consegue resolver alguma parte do problema? Mantenha apenas parte das condições do problema e observe o que ocorre com a incógnita: como ela varia agora? Você consegue obter alguma coisa desde os dados? Você consegue imaginar outros dados capazes de produzir a incógnita? Você consegue alterar a incógnita ou os lados, ou ambos, de modo que a nova incógnita e os novos dados fiquem mais próximos?

Não se esqueça de levar em conta todos os dados e todas as condições.

3ª etapa: executando a estratégia

Freqüentemente, esta é a etapa mais fácil do processo de resolução de um problema. Contudo, a maioria dos principiantes tende a pular esta etapa prematuramente e acabam se dando mal. Outros elaboram estratégias inadequadas e acabam se enredando terrivelmente na execução (e, deste modo, acabam sendo obrigados a voltar para a etapa anterior e elaborar uma nova estratégia).

Ao executar a estratégia, *verifique cada passo*. Você consegue mostrar que cada um deles está correto?

4ª etapa: revisando a solução

Você deve examinar a solução obtida, verificando os resultados e os argumentos utilizados.

Você pode obter a solução de algum outro modo?

Qual a essência do problema e do método de resolução aplicado? Em particular, você consegue usar o resultado - ou o método - em algum outro problema? Qual a utilidade deste resultado?

A importância de revisar a solução

Conforme vimos anteriormente, Polya dividiu o processo de resolução de problemas matemáticos em quatro etapas: entendimento do problema, invenção de estratégia de resolução, execução e revisão.

A revisão da solução é a etapa mais importante segundo Polya, pois esta etapa propicia uma *depuração* e uma *abstração* da solução do problema:

- **Depuração:** o objetivo é verificar a argumentação usada, procurando simplificá-la; pode-se chegar ao extremo de buscar outras maneiras de resolver o problema, possivelmente mais simples, mas menos intuitivas e só agora acessíveis ao resolvidor. Há uma crítica generalizada aos matemáticos pesquisadores por publicarem demonstrações muito artificiais ou abstratas e que certamente não representam a maneira como o resultado em demonstração foi descoberto. Contudo, é inegável que a revisão de depuração é muito proveitosa.

- **Abstração:** agora, o objetivo é refletir no processo de resolução procurando descobrir a essência do problema e do método de resolução empregado; tendo-se sucesso nessa empreitada, poder-se-á resolver outros problemas mais gerais ou de aparência bastante diferente. Ela representa a possibilidade de aumento do 'poder de fogo' do resolvidor. Feito por um matemático talentoso, esse trabalho de abstração representa a possibilidade de fertilização da Matemática.

Observamos que na Educação Básica existem ao menos caricaturas das três primeiras etapas de Polya, mas nada no que toca à etapa da revisão. Os professores ou ignoram essa importante etapa ou alegam que a mesma é inviável de trabalhar face à falta de tempo, dificuldade de testar, frustração dos alunos, etc.

Os princípios heurísticos de Alan Schoenfeld

Alan Schoenfeld, atualmente professor na área de desenvolvimento cognitivo do departamento de Matemática da University of Califórnia at Berkeley, é um importante pesquisador na área de educação e desenvolvimento cognitivo relacionado à Matemática. Ele já foi presidente da *American Educational Research Association (AERA)* - Associação de Pesquisas Educacionais dos EUA - e membro da *National Academy of Education* - isto é, a Academia Nacional de Educação dos EUA.



Alan Schoenfeld, matemático americano e pesquisador em desenvolvimento cognitivo.

De acordo com Alan Schoenfeld (1985), a compreensão e o ensino da matemática devem ser abordados como um domínio de resolução de problemas. Em seu livro *Mathematical Problem Solving* (1985), ele afirma que quatro categorias de conhecimento ou habilidades são necessárias para alguém ser bem-sucedido na matemática:

1. **Recursos:** conhecimento de procedimentos e questões da matemática.
2. **Heurísticas:** estratégias e técnicas para resolução de problemas, tais como trabalhar o que foi ensinado, ou desenhar figuras.
3. **Controle:** decisões sobre quando e quais recursos usar.
4. **Convicções:** uma visão matemática do mundo, que determina como alguém aborda um problema.

A teoria de Schoenfeld é sustentada por uma vasta análise de protocolo de alunos solucionando problemas. A estrutura teórica está baseada em outros trabalhos da psicologia cognitiva, particularmente o trabalho de Newell & Simon. Schoenfeld (1987) dá mais ênfase à importância da metacognição e aos componentes culturais envolvidos no aprendizado da matemática (isto é, sistemas de convicções) do que na sua formulação original.

Percebemos, por Schoenfeld, que o conhecimento de heurística de resolução de problemas é uma habilidade importante para um bom matemático, de forma que não basta apenas ser um bom conhecedor da teoria matemática para ser um bom 'resolvidor de problemas'.

Níveis de capacidade de resolução de problemas

Introdução

Mesmo que uma pessoa tenha extenso conhecimento de um certo assunto matemático, estando aí incluídos um extenso conhecimento de algoritmos e até mesmo de heurísticas, isso não é bastante para garantir que ela tenha uma capacidade mínima de resolver problemas sobre esse assunto.

Em Matemática, diferentemente do que ocorre em muitas disciplinas, muito mais importantes que erudição e treinamento são:

- ❑ Uma *intuição cultivada*, capaz de fazer ressonar as informações dadas no problema com conhecimentos e experiências do resolvidor.
- ❑ Uma *profundidade intelectual* do resolvidor que seja capaz de relacionar itens conceitualmente e/ou proceduralmente muito distantes entre si.

Em outras palavras: para uma dada pessoa, além de muito da sua capacidade de resolver problemas ser determinada geneticamente, a realização plena de seu potencial passa por uma orientação adequada e experiente.

Níveis no desenvolvimento do resolvidor de problemas

M. G. Kantowski (1980), a partir de longas observações, dividiu o continuum das capacidades pessoais de resolução de problemas matemáticos em quatro estágios. Novamente, a *dotação genética* e a *qualidade da orientação didática* determinarão quão longe uma dada pessoa conseguirá ir nesse continuum.

Ampliando os estágios de Kantowski para cinco, e usando nossa terminologia, teremos como estágios ou níveis de capacitação do resolvidor:

- ❑ *Inerte*: a pessoa tem nenhum ou quase nenhum entendimento do que seja resolver um problema matemático; em particular, não é capaz de atinar por onde começar. O máximo que se consegue fazer nesse estágio é reproduzir procedimentos de resolução muito simples e que foram exaustivamente explicados e exemplificados. Ou seja: uma pessoa nesse estágio está restrita ao mundo dos exercícios e é necessário que esses sejam bastante exemplificados.
- ❑ *Limitador*: com pouca explicação e exemplificação, torna-se capaz de fazer exercícios, mas ainda não é capaz de resolver verdadeiros problemas; é capaz de participar produtivamente em grupos que estejam discutindo a resolução de problemas de tipo novo, contudo é incapaz de trabalhar sozinho.
- ❑ *Capaz*: atingiu a capacidade de resolver problemas, mas esses devem ser variantes relativamente simples de problemas que aprendeu ou já resolveu.
- ❑ *Avançado*: além de demonstrar uma capacidade superior de resolução, através da velocidade de resolução, da variedade e da maior complexidade dos problemas que é capaz de enfrentar, a pessoa começa a ser capaz de conceber processos de resolução diferentes dos que tinha aprendido.
- ❑ *Artista*: a pessoa não só atingiu uma proficiência superior de inventar novos processos de resolução como se preocupa em explorar caminhos alternativos, buscando resoluções mais elegantes ou poderosas.

Exemplificando as idéias de Polya e Schoenfeld

Introdução

Apresentamos várias idéias relacionadas à resolução de problemas matemáticos. É importante exemplificar problemas para que possamos ter uma noção da aplicação dessas idéias e percebermos que, de fato, o conhecimento da heurística de Polya e da concepção de Schoenfeld pode nos ajudar bastante a melhorar o nosso nível de resolução de problemas.

Procuraremos exemplificar qualitativamente, com poucos exemplos, mas de forma a extrair o máximo possível pertinente ao problema; ou seja, os exemplos serão abordados segundo a heurística de Polya (seguindo a estratégia passo a passo) ou segundo a concepção de Schoenfeld.

Nosso objetivo aqui é, portanto, complementar a teoria já apresentada até então para facilitar a compreensão do leitor.

Exemplo da utilização da concepção de Alan Schoenfeld

Schoenfeld utiliza em seu livro *Mathematical Problem Solving* (1985) um problema para ilustrar a sua teoria:

Dadas duas linhas retas em interseção e um ponto P marcado em uma delas, mostrar como construir um círculo que é tangente a ambas as linhas e tem o ponto P como seu ponto de tangência em relação às duas linhas.

Exemplos de conhecimento de recurso incluem o procedimento para desenhar uma linha perpendicular de ponto P até o centro do círculo e o significado desta ação.

Uma heurística importante para solucionar este problema é construir um diagrama do problema.

Uma estratégia de controle envolveria a decisão para construir um círculo e segmentos de linha usando um compasso e um transferidor.

Uma convicção que poderia ser relevante para este problema é que as soluções devem ser empíricas (isto é, construídas) em vez de derivadas de outros resultados teóricos.

Exemplo da aplicação da estratégia de George Polya

Vamos ilustrar a estratégia de resolução de problemas proposta por Polya em seu livro *How To Solve It* através dos exemplos abaixo.

Um gato está sobre um muro de 4m de altura quando avista um rato a uma distância de 8m da base do muro. Quando o rato dirige-se a sua casa (em linha

reta até o muro) é comigo pelo gato, que pula diagonalmente, andando o mesmo comprimento que o rato tinha andado até então. Qual a distância que cada um percorreu?

1ª etapa: compreensão do problema

Para entendermos um problema devemos estar em condições de identificar as partes principais do problema, ou seja, a incógnita, os dados, a condicionante. Caso haja uma figura relacionada ao problema, é importante desenhá-la e adotar uma notação adequada.

QUAL É A INCÓGNITA?

A distância que cada um percorreu; denotaremos a mesma por d .

QUAIS SÃO OS DADOS?

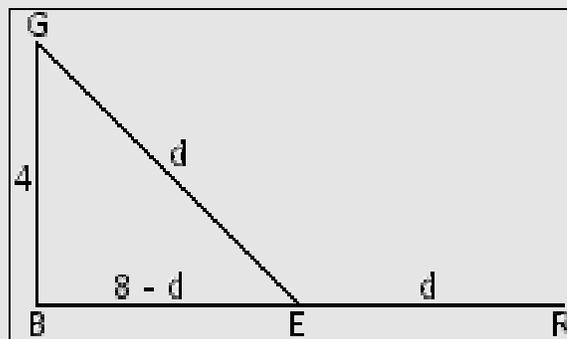
Altura do muro: 4m.

Distância do rato à base do muro: 8m.

A trajetória percorrida pelo gato é uma linha reta diagonal.

O muro é perpendicular ao chão.

TRAÇANDO UMA FIGURA PARA ESQUEMATIZAR O PROBLEMA:



2ª etapa: estabelecimento de um plano

“Consideramos que temos um plano quando, ao menos em linhas gerais, sabemos quais são os cálculos, construções, etc., que devemos efetuar para encontrar a solução do problema considerado” (G. Polya, **A arte de resolver problemas**)

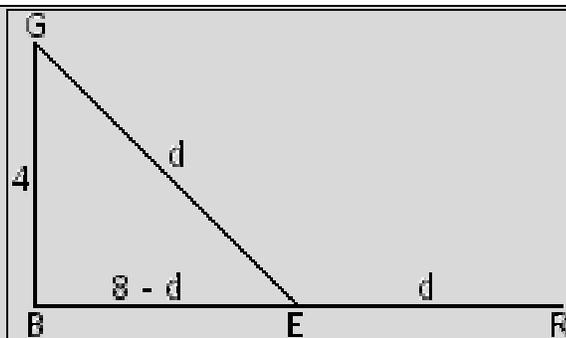
Vamos encontrar a conexão entre os dados e a incógnita do problema, reduzindo-a a figuras geométricas com propriedades conhecidas. Neste caso, visualizamos três triângulos ($\triangle BGE$, $\triangle BGR$ e $\triangle EGR$), sendo os dois primeiros retângulos e o último isósceles.

O plano é resolvê-lo através do triângulo retângulo menor ($\triangle BGE$, retângulo em $\angle GBE$) aplicando o Teorema de Pitágoras, pois conhecemos a distância $BG = 4\text{m}$ e as distâncias BE e GE em função de d , isto é, $BE = 8 - d$ e a distância $GE = d$.

3ª etapa: execução do plano

Nesta etapa devemos observar se é possível executar o plano.

Observemos a figura construída novamente:



$$\Rightarrow d^2 = (8 - d)^2 + 4^2$$

$$\Leftrightarrow d^2 = 64 - 16d + d^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 16d = 80$$

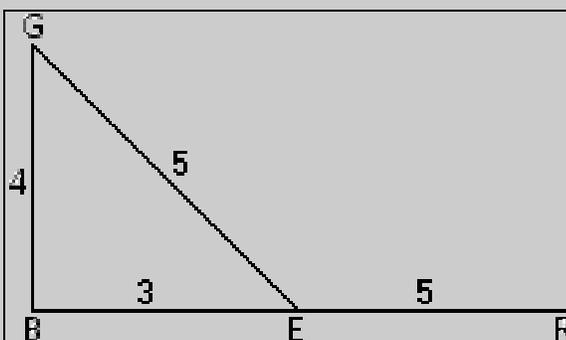
$$\Leftrightarrow d = 5$$

4ª etapa: revisão da solução

Nesta etapa, examinamos a solução obtida.

É POSSÍVEL VERIFICAR O RESULTADO?

De fato, basta substituir $d = 5$ na figura acima e teremos a seguinte situação:



Deste modo, chegamos a resposta de que a distância percorrida tanto pelo gato quanto pelo rato é 5m.

É POSSÍVEL VERIFICAR O ARGUMENTO?

O argumento utilizado foi o Teorema de Pitágoras, cujo uso era válido pelo fato do triângulo $\triangle BGE$ ser retângulo em B.

É POSSÍVEL UTILIZAR O RESULTADO OU O MÉTODO EM ALGUM OUTRO PROBLEMA?

Notamos que todo triângulo retângulo de catetos 3 e 4 possui hipotenusa 5 (o famoso triângulo retângulo 3, 4 e 5, o único de lados sendo inteiros consecutivos). O Teorema de Pitágoras é extremamente útil e empregado na resolução de muitos problemas.

É POSSÍVEL CHEGAR AO RESULTADO POR CAMINHO DIFERENTE?

Uma idéia poderia ser olhar para o triângulo isósceles $\triangle EGR$ e utilizar a lei dos co-senos. Não garantimos que, de fato, haja uma solução por este caminho, mas ao menos parece ser um caminho interessante!

Conclusões

A resolução de problemas é a essência do desenvolvimento da Matemática e tem um papel extremamente importante no ensino da Matemática em todos os níveis.

Compreender as idéias contidas neste texto poderá ajudar bastante o leitor a ter uma visão mais apurada da matemática, do ensino e desenvolvimento desta ciência e, porque não, do mundo no qual estamos inseridos.

As etapas de resolução de problemas propostas por Polya não se constituem em uma 'poção mágica' para resolver todo e qualquer problema matemático, mas podem ajudar bastante quem quer se tornar um bom resolvidor de problemas - ou ainda, quem já o é e pretende se aperfeiçoar nesta tarefa. As idéias de Polya ajudam o resolvidor no sentido de organizar as idéias do mesmo e, da nossa perspectiva, quando temos idéias organizadas a solução de um problema se torna uma tarefa comumente mais simples em comparação a uma situação onde as idéias não estão organizadas.

A visão de um bom matemático dado por Schoenfeld trouxe uma valorização do matemático: não adianta ser um bom teórico, mas é preciso também ser um bom resolvidor de problemas - e isto inclui saber organizar as suas idéias e ter criatividade para fazer novas descobertas.

Sem o desejo de querermos ser pretensiosos, concordamos que o estudo da heurística de resolução de problemas - embora esta seja específica da ciência matemática - é um dos assuntos que mais indaga a origem da criatividade do pensamento humano que constitui um dos elementos fundamentais do desenvolvimento da matemática como ciência que auxilia a resolução de vários dos problemas humanos.

Portanto, um matemático conhecedor de heurísticas de resolução de problemas possui um diferencial a seu favor, pois provavelmente terá uma visão mais completa da matemática e terá mais facilidade para lidar com os problemas que aparecem em suas pesquisas, além de saber organizar melhor o seu raciocínio - e isto pode ser estendido para todas as pessoas, não se restringindo aos matemáticos. Um professor conhecedor de heurística de resolução de problemas - que, ao nosso ver, não se restringe à matemática - dispõe de um importante recurso para desenvolver a sua metodologia e com isso facilitar e aprimorar o processo ensino-aprendizagem, tornando os alunos mais criativos e encorajados a realizar novas descobertas - o que é importante em todos os campos do conhecimento.

Bibliografia

Artigos

- ❑ PEREIRA, Antônio Luiz. **Motivação para a disciplina MAT450 - Seminários de Resolução de Problemas**. São Paulo, IME-USP, agosto de 2001, 17p.
- ❑ RESNIK, L. & COLLINS, Allan. Cognición y Aprendizaje. En **Anuario Psicología**. Nº 69, pp 189-197. Barcelona, Grafiques 92, S.A, 1996.

Livros

- ❑ FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo Aurélio - O dicionário da língua portuguesa**. Rio de Janeiro, Nova Fronteira, 2000, 3ª edição.
- ❑ POGGIOLI, L. **Estrategias de resolución de problemas**. Serie Enseñando a aprender. Caracas, Polar, 2001.
- ❑ POLYA, George. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro, Interciência, 1978.
- ❑ POLYA, George. **How To Solve It**. Princeton, Princeton University Press, 1957.
- ❑ POLYA, George. **Mathematical Discovery: on Understanding, Learning, and Teaching Problem Solving**. 2 vols. John Wiley, 1962-65.
- ❑ POLYA, George. **Mathematics and Plausible Reasoning**. Vols I e II. Princeton, 1964.
- ❑ SCHOENFELD, Alan. **A brief and biased history of problem solving**. California, University of California, 1990.
- ❑ SCHOENFELD, Alan. **Cognitive Science and Mathematics Education**. Hillsdale, Erlbaum, 1987.
- ❑ SCHOENFELD, Alan. **Mathematical Problem Solving**. New York, Academic Press, 1985.
- ❑ SCHOENFELD, Alan. **Teaching problem-solving skills**. American Math, October 1987.
- ❑ SKEMP, R. **Relational understanding and instrumental understanding**. Arithmetic Teacher, 1978.
- ❑ THOMPSON, A. Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In **Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning**. New York, Macmillan, 1992.
- ❑ WALLAS, Graham. **The Art of Thought**. 1926.

Sites na Internet

1. Biography of Polya.
<http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Polya.html>
2. Biography of Schoenfeld.
<http://www.nottingham.ac.uk/education/MARS/personnel/as.html>
<http://www-gse.berkeley.edu/Faculty/aschoenfeld/>
3. Fundação Polar - Livro Enseñando a aprender - Lisette Poggioli.
<http://www.fpolar.org.ve/poggioli/poggio05.htm>
4. LSE - London School of Economics and Political Science - Biography of Graham Wallas.
<http://www.lse.ac.uk/lsehistory/wallas.htm>

5. Planeta Educação - Teorias pedagógicas - Resolução de problemas matemáticos (A. Schoenfeld).
<http://www.planetaeducacao.com.br/professores/suporteaprof/pedagogia/teoria31resprobrmat.asp>
6. Revista Ibero-americana de Educação - Experiências e Inovações.
<http://www.campus-oei.org/revista/experiencias9.htm>
7. UFRGS - J. F. Porto da Silveira - Resolução de problemas.
<http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/resu.html>
8. UFRGS - Resolução de problemas.
<http://mathematikos.psico.ufrgs.br/disciplinas/ufrgs/mat01347991/alunos/pfc/problemas1.html>

Sobre a capa

A capa deste trabalho é uma homenagem a *George Polya*¹⁰ (foto maior) e *Alan Schoenfeld*¹¹ (em destaque, no canto inferior direito), considerados os dois maiores pesquisadores em heurística de resolução de problemas matemáticos.

¹⁰ A foto de Polya é cortesia do site <http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Polya.html>

¹¹ A foto de Schoenfeld é cortesia do site <http://www-gse.berkeley.edu/Faculty/aschoenfeld/>